256

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

4195 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. CH. HERMITE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1885

gift of Prof. Gabor Szegö

A LA MÉMOIRE

DE

C.-W. BORCHARDT.

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

La théorie analytique de la chaleur donne pour l'importante question de l'équilibre des températures d'un corps solide homogène, soumis à des sources calorifiques constantes, une équation aux différences partielles dont l'intégration, dans le cas de l'ellipsoïde, a été l'une des belles découvertes auxquelles est attaché le nom de Lamé. Les résultats obtenus par l'illustre géomètre découlent principalement de l'étude approfondie d'une équation différentielle linéaire du second ordre, que j'écrirai avec les notations de la théorie des fonctions elliptiques, sous la forme suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

k étant le module, n un nombre entier et h une constante. Lamé a montré que, pour des valeurs convenables de cette constante, on y satisfait par des polynômes entiers en $\operatorname{sn} x$:

$$y = \operatorname{sn}^n x + h_1 \operatorname{sn}^{n-2} x + h_2 \operatorname{sn}^{n-4} x + \ldots,$$

dont les termes sont de même parité, puis encore par ces expressions :

$$y = (\operatorname{sn}^{n-1} x + h'_1 \operatorname{sn}^{n-3} x + h'_2 \operatorname{sn}^{n-5} x + \ldots) \operatorname{cn} x,$$
$$y = (\operatorname{sn}^{n-1} x + h''_1 \operatorname{sn}^{n-3} x + h''_2 \operatorname{sn}^{n-5} x + \ldots) \operatorname{dn} x,$$
$$y = (\operatorname{sn}^{n-2} x + h'''_1 \operatorname{sn}^{n-4} x + h'''_2 \operatorname{sn}^{n-6} x + \ldots) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x.$$

M. Liouville a ensuite introduit, dans la question physique, la considération de la seconde solution de l'équation différentielle, d'où il a tiré des théorèmes du plus grand intérêt (¹). C'est également cette seconde solution, dont la nature et les propriétés ont été approfondies par M. Heine, qui a montré l'analogie de ces deux genres de fonctions de Lamé avec

(¹) *Comptes rendus*, 1845, 1er semestre, p. 1386 et 1609; *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 217 et 261.

les fonctions sphériques, et leurs rapports avec la théorie des fractions continues algébriques. On doit de plus à l'éminent géomètre une extension de ses profondes recherches à des équations différentielles linéaires du second ordre beaucoup plus générales, qui se rattachent aux intégrales abéliennes, comme celle de Lamé aux fonctions elliptiques ([1]).

Je me suis placé à un autre point de vue en me proposant d'obtenir, quel que soit h, l'intégrale générale de cette équation, et c'est l'objet principal des recherches qu'on va lire. On verra que la solution est toujours, comme dans les cas particuliers considérés par Lamé, une fonction uniforme de la variable, mais qui n'est plus doublement périodique. Elle est, en effet, donnée par la formule

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}'\,\mathrm{F}(-x),$$

ou la fonction $\mathrm{F}(x)$, qui satisfait à ces deux conditions

$$\mathrm{F}(x + 2\,\mathrm{K}) = \mu\,\mathrm{F}(x),$$
$$\mathrm{F}(x + 2i\mathrm{K}') = \mu'\,\mathrm{F}(x),$$

dans lesquelles les facteurs μ et μ' sont des constantes, s'exprime comme il suit. Soit, pour un moment,

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)}\, e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x},$$

nous aurons

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{D}_x^{n-1}\Phi(x) - \mathrm{A}_1\,\mathrm{D}_x^{n-3}\Phi(x) + \mathrm{A}_2\,\mathrm{D}_x^{n-5}\Phi(x) - \ldots;$$

les quantités $\operatorname{sn}^2\omega$ et λ^2 sont des fonctions rationnelles du module et de h, et les coefficients A_1, A_2, ..., des fonctions entières. On a, par exemple,

$$\mathrm{A}_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}\left[h + \frac{n(n+1)(1+k^2)}{3}\right],$$

$$\mathrm{A}_2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8(2n-1)(2n-3)}$$
$$\times\left[h^2 + \frac{2n(n+1)(1+k^2)}{3}h + \frac{n^2(n+1)^2}{9}(1+k^2)^2 - \frac{2n(n+1)(2n-1)}{15}(1-k^2+k^4)\right],$$

. . . .

([1]) *Journal de Crelle* (*Beitrag zur Theorie des Anziehung und der Wärme*, t. 29); *Journal de M. Borchardt* (*Ueber die Lameschen Functionen; Einige Eigenschaften der Lameschen Functionen*, dans le t. 56, et *Die Lameschen Functionen verschiedener Ordnungen*, Je m'occuperai, avant de traiter le cas général où le nombre n est quelconque, des cas particuliers de $n = 1$ et $n = 2$. Le premier s'applique à la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a point de forces accélératrices, et nous conduira aux formules données par Jacobi dans son admirable Mémoire sur cette question (*Œuvres complètes*, t. II, p. 139, et *Comptes rendus*, 30 juillet 1849). J'y rattacherai encore la détermination de la figure d'équilibre d'un ressort, qui a été le sujet de travaux de Binet et de Wantzel (*Comptes rendus*, 1844, 1er semestre, p. 1115 et 1197). Le second se rapportant au pendule sphérique, j'aurai ainsi réuni quelques-unes des plus importantes applications qui aient été faites jusqu'ici de la théorie des fonctions elliptiques.

I.

La méthode que je vais exposer, pour intégrer l'équation de Lamé, repose principalement sur des expressions, par les quantités $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, ..., des fonctions $\mathrm{F}(x)$, satisfaisant aux conditions énoncées tout à l'heure

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x+2\mathrm{K}) &= \mu\,\mathrm{F}(x), \\ \mathrm{F}(x+2i\mathrm{K}') &= \mu'\mathrm{F}(x), \end{aligned}$$

qui s'obtiennent ainsi :

Soit, en désignant par A un facteur constant,

$$f(x) = \mathrm{A}\frac{\mathrm{H}(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\mathrm{H}(x)};$$

les relations fondamentales

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(x+2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}(x), \\ \mathrm{H}(x+2i\mathrm{K}') &= -\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')} \end{aligned}$$

donneront celles-ci :

$$\begin{aligned} f(x+2\mathrm{K}) &= f(x)\,e^{2\lambda\mathrm{K}}, \\ f(x+2i\mathrm{K}') &= f(x)\,e^{-\frac{i\pi\omega}{\mathrm{K}}+2i\lambda\mathrm{K}'}. \end{aligned}$$

Disposant donc de ω et λ de manière à avoir

$$\begin{aligned} \mu &= e^{2\lambda\mathrm{K}}, \\ \mu' &= e^{-\frac{i\pi\omega}{\mathrm{K}}+2i\lambda\mathrm{K}'}, \end{aligned}$$

---

t. 57). Le premier de ces Mémoires, paru en 1845, mais daté du 19 avril 1844, contient une application de la seconde solution de l'équation de Lamé, qui a été par conséquent découverte par M. Heine, indépendamment des travaux de M. Liouville, et à la même époque.

on voit que le quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ est ramené aux fonctions doublement périodiques, d'où cette première forme générale et dont il sera souvent fait usage :

$$F(x) = f(x)\Phi(x),$$

la fonction $\Phi(x)$ n'étant assujettie qu'aux conditions

$$\Phi(x+2K) = \Phi(x), \quad \Phi(x+2iK') = \Phi(x).$$

En voici une seconde, qui est fondamentale pour notre objet. Je remarque que les relations

$$f(x+2K) = \mu f(x),$$
$$f(x+2iK') = \mu' f(x),$$

ont pour conséquence celles-ci :

$$f(x-2K) = \frac{1}{\mu} f(x),$$
$$f(x-2iK') = \frac{1}{\mu'} f(x),$$

de sorte que le produit

$$\Phi(z) = F(z) f(x-z)$$

sera, quel que soit x, une fonction doublement périodique de z. Cela étant, nous allons calculer les résidus de $\Phi(z)$, pour les diverses valeurs de l'argument qui la rendent infinie, dans l'intérieur du rectangle des périodes; et, en égalant leur somme à zéro, nous obtiendrons immédiatement l'expression cherchée. Remarquons à cet effet que $f(x)$ ne devient infinie qu'une fois pour $x = 0$, et que, son résidu ayant pour valeur

$$\frac{AH(\omega)}{H'(0)},$$

on peut disposer de A, de manière à le faire égal à l'unité. Posant donc, en adoptant cette détermination,

$$f(x) = \frac{H'(0)H(x+\omega)e^{\lambda x}}{H(\omega)H(x)},$$

on voit que le résidu correspondant à la valeur $z = x$ de $\Phi(z)$ sera $-F(x)$. Ceux qui proviennent des pôles de $F(z)$ s'obtiennent ensuite sous la forme suivante. Soit $z=a$ l'un d'eux, et posons en conséquence, pour ε infiniment petit,

$$F(a+\varepsilon)=A\varepsilon^{-1}+A_1D_\varepsilon\varepsilon^{-1}+A_2D_\varepsilon^2\varepsilon^{-1}+\ldots+A_\alpha D_\varepsilon^\alpha\varepsilon^{-1}+a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots,$$

$$f(x-a-\varepsilon)=f(x-a)-\frac{\varepsilon}{1}D_x f(x-a)$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{1.2}D_x^2 f(x-a)-\ldots+\frac{(-1)^\alpha\varepsilon^\alpha}{1.2\ldots\alpha}D_x^\alpha f(x-a)+\ldots,$$

le coefficient du terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit des seconds membres, qui est la quantité cherchée, se trouve immédiatement, en remarquant que

$$D_\varepsilon^n\varepsilon^{-1}=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{\varepsilon^{n+1}},$$

et a pour expression

$$Af(x-a)+A_1D_x f(x-a)+A_2D_x^2 f(x-a)+\ldots+A_\alpha D_x^\alpha f(x-a).$$

La somme des résidus de la fonction $\Phi(z)$, égalée à zéro, nous conduit ainsi à la relation

$$F(x)=\Sigma[Af(x-a)+A_1D_x f(x-a)+\ldots+A_\alpha D_x^\alpha f(x-a)],$$

où le signe Σ se rapporte, comme il a été dit, à tous les pôles de $F(z)$ qui sont à l'intérieur du rectangle des périodes.

II.

La fonction $F(x)$ comprend les fonctions doublement périodiques; en supposant égaux à l'unité les multiplicateurs μ et μ', je vais immédiatement rechercher ce que l'on tire, dans cette hypothèse, du résultat auquel nous venons de parvenir. Tout d'abord les relations

$$\mu=e^{2\lambda K},\quad \mu'=e^{-\frac{i\pi\omega}{K}+2i\lambda K'}$$

donnant nécessairement $\lambda=0$ et $\omega=2mK$, ou, ce qui revient au même, $\omega=0$, le nombre m étant entier, la quantité $f(x)=\frac{H'(0)H(x+\omega)}{H(\omega)H(x)}e^{\lambda x}$ devient infinie et la formule semble inapplicable. Mais il arrive seulement qu'elle subit un changement de forme analytique, qui s'obtient de la manière la plus facile, comme on va voir. Supposons, en effet, $\lambda=0$ et ω infiniment petit, on aura, en développant suivant les puissances croissantes de ω,

$$\frac{H'(0)}{H(\omega)} = \frac{1}{\omega} + \left(\frac{1+k^2}{6} - \frac{J}{2K}\right)\omega + \ldots$$

$$\frac{H(x+\omega)}{H(x)} = 1 + \frac{H'(x)}{H(x)}\omega + \ldots;$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\omega} + \frac{H'(x)}{H(x)} + \left(\frac{1+k^2}{6} - \frac{J}{2K}\right)\omega + \ldots.$$

D'autre part, observons que les coefficients A, A_1, ... doivent être considérés comme dépendants de ω, et qu'on aura en particulier

$$A = a + a'\omega + \ldots,$$

a, a′, ... désignant les valeurs de A et de ses dérivées par rapport à ω pour $\omega = 0$. Nous obtenons donc, en n'écrivant point les termes qui contiennent ω en facteur,

$$Af(x-a) = \frac{a}{\omega} + a' + a\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots$$

et, par conséquent,

$$\Sigma Af(x-a) = \frac{1}{\omega}\Sigma a + \Sigma a' + \Sigma a\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots.$$

Or on voit que le coefficient de $\frac{1}{\omega}$ disparaît, les quantités a ayant une somme nulle comme résidus d'une fonction doublement périodique, et la différentiation donnant immédiatement, pour $\omega = 0$,

$$D_x f(x) = D_x\frac{H'(x)}{H(x)}, \quad D_x^2 f(x) = D_x^2\frac{H'(x)}{H(x)}, \quad \ldots,$$

nous parvenons à l'expression suivante, où a, a_1, ..., a_α sont les valeurs de A, A_1, ..., A_α pour $\omega = 0$:

$$F(x) = \Sigma a' + \Sigma\left[a\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + a_1 D_x\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots + a_\alpha D_x^\alpha\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}\right].$$

C'est la formule que j'ai établie directement, pour les fonctions doublement périodiques, dans une *Note sur la théorie des fonctions elliptiques*, ajoutée à la sixième édition du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix.

III.

Revenant au cas général pour donner des exemples de la détermination de la fonction $f(x)$, qui joue le rôle d'élément simple, et du calcul des coefficients $A, A_1, A_2, \ldots$, je considérerai ces deux expressions :

$$F(x) = \frac{\Theta(x+a)\Theta(x+b)\ldots\Theta(x+l)e^{\lambda x}}{\Theta^n(x)},$$
$$F_1(x) = \frac{H(x+a)H(x+b)\ldots H(x+l)e^{\lambda x}}{\Theta^n(x)},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont des constantes au nombre de n. On trouve d'abord aisément leurs multiplicateurs, au moyen des relations

$$\begin{aligned} \Theta(x+2K) &= +\Theta(x), \\ H(x+2K) &= -H(x), \\ \Theta(x+2iK') &= -\Theta(x)e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}, \\ H(x+2iK') &= -H(x)e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}. \end{aligned}$$

Elles montrent qu'en posant

$$\omega = a + b + \ldots + l,$$

puis, comme précédemment,

$$\mu = e^{2\lambda K},$$
$$\mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{K}+2i\lambda K'},$$

on aura

$$F(x+2K) = \mu F(x), \quad F_1(x+2K) = (-1)^n \mu F_1(x),$$
$$F(x+2iK') = \mu' F(x), \quad F_1(x+2iK') = \mu' F_1(x).$$

Il en résulte que, quand n est pair, la fonction

$$f(x) = \frac{H'(0)H(x+\omega)e^{\lambda x}}{H(\omega)H(x)},$$

ayant ces quantités μ et μ' pour multiplicateurs, peut servir d'élément simple pour nos deux expressions; mais il n'en est plus de même relativement à la seconde $F_1(x)$, dans le cas où n est impair : on voit aisément qu'il faut prendre alors pour élément simple la fonction

$$f_1(x) = \frac{H'(o)\Theta(x+\omega)e^{\lambda x}}{\Theta(\omega)H(x)},$$

afin de changer le signe du premier multiplicateur, le résidu correspondant à $x = o$ étant d'ailleurs égal à l'unité. Cela posé, comme $F(x)$ et $F_1(x)$ ne deviennent infinies que pour $x = iK'$, ce sont les quantités $f(x-iK')$ et $f_1(x-iK')$ qui figureront dans notre formule. Il convient de leur attribuer une désignation particulière, et nous représenterons dorénavant, la première par $\varphi(x)$ et la seconde par $\chi(x)$, en observant que les relations

$$\Theta(x+iK') = iH(x)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$
$$H(x+iK') = i\Theta(x)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}$$

donnent facilement, après y avoir changé x en $-x$, ces valeurs :

$$\varphi(x) = \frac{H'(o)\Theta(x+\omega)e^{\lambda x}}{\sqrt{\mu'}\,H(\omega)\Theta(x)},$$

$$\chi(x) = \frac{H'(o)H(x+\omega)e^{\lambda x}}{\sqrt{\mu'}\,\Theta(\omega)\Theta(x)}.$$

Nous avons maintenant à calculer dans les développements de $F(iK'+\varepsilon)$ et $F_1(iK'+\varepsilon)$, suivant les puissances croissantes de ε, la partie qui renferme les puissances négatives de cette quantité, et qu'on pourrait, pour abréger, nommer la partie principale. A cet effet, je remarque qu'en faisant, pour un moment,

$$F(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)}, \quad F_1(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

on aura

$$F(iK'+\varepsilon) = \frac{\sqrt{\mu'}\,\Pi_1(\varepsilon)}{H^n(\varepsilon)}, \quad F_1(iK'+\varepsilon) = \frac{\sqrt{\mu'}\,\Pi(\varepsilon)}{H^n(\varepsilon)}.$$

Nous développerons donc $\Pi(\varepsilon)$ et $\Pi_1(\varepsilon)$, par la formule de Maclaurin, jusqu'aux termes en ε^{n-1}, et nous multiplierons par la partie principale de $\frac{1}{H^n(\varepsilon)}$, qui s'obtient, comme on va voir, au moyen de la fonction de M. Weierstrass :

$$\mathrm{Al}(x)_1 = x - \frac{1+k^2}{6}x^3 + \frac{1+4k^2+k^4}{120}x^5 - \ldots.$$

On a en effet, d'après la définition même de l'illustre analyste,

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{H}'(0)\, e^{\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}\, \mathrm{Al}(x)_1,$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(\varepsilon)}\right]^n &= e^{-\frac{n\mathrm{J}\varepsilon^2}{2\mathrm{K}}}\left[\varepsilon - \frac{1+k^2}{6}\varepsilon^3 + \frac{1+4k^2+k^4}{120}\varepsilon^5 - \ldots\right]^{-n}\\ &= e^{-\frac{n\mathrm{J}\varepsilon^2}{2\mathrm{K}}}\left[\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{n(1+k^2)}{6}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots\right]\\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} + n\left(\frac{1+k^2}{6} - \frac{\mathrm{J}}{2\mathrm{K}}\right)\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots.\end{aligned}$$

IV.

Je vais appliquer ce qui précède au cas le plus simple, en supposant $n = 2$ et $\lambda = 0$, ce qui donnera

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

et, par conséquent,

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{\mu'}}}\,\Pi_1(\varepsilon) = \mathrm{H}(a)\mathrm{H}(b) + [\mathrm{H}(a)\mathrm{H}'(b) + \mathrm{H}(b)\,\mathrm{H}'(a)]\varepsilon + \ldots,$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{\mu'}}}\,\Pi(\varepsilon) = \theta(a)\,\theta(b) + [\theta(a)\,\theta'(b) + \theta(b)\theta'(a)]\varepsilon + \ldots.$$

Maintenant la partie principale de $\frac{1}{\mathrm{H}^2(\varepsilon)}$ ne contenant que le seul terme $\frac{1}{\mathrm{H}'^2(0)}\frac{1}{\varepsilon^2}$, on a immédiatement

$$\frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\sqrt{\mu'}}\mathrm{F}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{\mathrm{H}(a)\mathrm{H}(b)}{\varepsilon^2} + \frac{\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}'(b) + \mathrm{H}(b)\mathrm{H}'(a)}{\varepsilon} + \cdots,$$

$$\frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\sqrt{\mu'}}\mathrm{F}_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{\Theta(a)\,\Theta(b)}{\varepsilon^2} + \frac{\Theta(a)\Theta'(b)+\Theta(b)\Theta'(a)}{\varepsilon} + \cdots,$$

et, par conséquent, ces deux relations

$$\frac{\mathrm{H}'^2(0)\Theta(x+a)\Theta(x+b)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta^2(x)} = -\mathrm{H}(a)\mathrm{H}(b)\varphi'(x) + [\mathrm{H}(a)\mathrm{H}'(b) + \mathrm{H}(b)\mathrm{H}'(a)]\varphi(x),$$

$$\frac{\mathrm{H}'^2(0)\,\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x+b)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta^2(x)} = -\theta(a)\theta(b)\,\varphi'(x) + [\theta(a)\,\theta'(b) + \theta(b)\theta'(a)]\,\varphi(x).$$

En y remplaçant $\varphi(x)$ par sa valeur $\dfrac{\mathrm{H}'(\mathrm{o})\,\Theta(x+a+b)}{\sqrt{\mu'}\,\mathrm{H}(a+b)\,\Theta(x)}$, je les écrirai sous la forme suivante, qui est plus simple :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{o})\,\mathrm{H}(a+b)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}(b)\,\Theta^2(x)}\\
&\qquad = -\,\mathrm{D}_x\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)} + \left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)}\right]\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)},\\
&\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{o})\,\mathrm{H}(a+b)\,\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta^2(x)}\\
&\qquad = -\,\mathrm{D}_x\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)} + \left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}.
\end{aligned}$$

On en tire d'abord, à l'égard des fonctions Θ, cette remarque que, sous la condition

$$a+b+c+d=\mathrm{o},$$

on a l'égalité [1]

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}'(\mathrm{o})\,\mathrm{H}(a+b)\,\mathrm{H}(a+c)\,\mathrm{H}(b+c) = {}&\Theta'(a)\,\Theta(b)\,\Theta(c)\,\Theta(d)\\
&+\Theta'(b)\,\Theta(c)\,\Theta(d)\,\Theta(a)\\
&+\Theta'(c)\,\Theta(d)\,\Theta(a)\,\Theta(b)\\
&+\Theta'(d)\,\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(c).
\end{aligned}$$

Mais c'est une autre conséquence que j'ai en vue, et qu'on obtient en mettant la première, par exemple, sous la forme

$$\Phi(x) = py - y',$$

où $\Phi(x)$ désigne le premier membre, y la fonction $\dfrac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}$, et p la constante $\dfrac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \dfrac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)}$.

Si nous multiplions par e^{-px}, elle devient, en effet,

$$\Phi(x)\,e^{-px} = -\,\mathrm{D}_x\,(y e^{-px}),$$

d'où

$$\int \Phi(x)\,e^{-px}\,dx = -\,y e^{-px}.$$

Ce résultat appelle l'attention sur un cas particulier des fonctions $\varphi(x)$,

---

[1] Elle a été donnée par Jacobi, *Journal de Crelle* (*Formulæ novæ in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales*, t. 15, p. 199).

où, par suite d'une certaine détermination de λ, elles ne renferment plus qu'un paramètre. On voit qu'en posant

$$\varphi(x, a) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\sqrt{\mu'}\,\mathrm{H}(a)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)}x},$$

ce qui entraîne, pour le multiplicateur μ', la valeur

$$\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{\mathrm{K}} - 2i\mathrm{K}'\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)}},$$

l'intégrale $\int \varphi(x, a)\,\varphi(x, b)\,dx$ s'obtient sous forme finie explicite. Un calcul facile conduit en effet à la relation

$$\int \varphi(x, a)\varphi(x, b)\,dx = -\varphi(x, a+b)\,e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} - \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)}\right](x - i\mathrm{K}')}.$$

Faisons, en second lieu,

$$\chi(x, a) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta(a)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

en désignant alors par μ' la quantité

$$\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{\mathrm{K}} - 2i\mathrm{K}'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

et nous aurons semblablement

$$\int \chi(x, a)\,\chi(x, b)\,dx = -\varphi(x, a+b)\,e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right](x - i\mathrm{K}')}.$$

On en déduit aisément qu'en désignant par a et b deux racines, d'abord de l'équation $\mathrm{H}'(x) = 0$, puis de l'équation $\Theta'(x) = 0$, on aura, dans le premier cas,

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \varphi(x, a)\varphi(x, b)\,dx = 0;$$

et dans le second,

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \chi(x, a)\,\chi(x, b)\,dx = 0,$$

sous la condition que les deux racines ne soient point égales et de signes contraires. Si l'on suppose $b = -a$, nous obtiendrons

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \varphi(x, a)\varphi(x, -a)\,dx = 2\left(\mathrm{J} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{sn}^2 a}\right),$$

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \chi(x, a)\chi(x, -a)\,dx = 2(\mathrm{J} - k^2\mathrm{K}\,\mathrm{sn}^2 a).$$

On voit les recherches auxquelles ces théorèmes ouvrent la voie et que je me réserve de poursuivre plus tard; je me borne à les indiquer succinctement, afin de montrer l'importance des fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$. Voici maintenant comment on parvient à les définir par des équations différentielles.

V.

Nous remarquerons, en premier lieu, que les fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ peuvent être réduites l'une à l'autre; leurs expressions, si l'on y remplace le multiplicateur μ' par sa valeur, étant, en effet,

$$\varphi(x, \omega) = \frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}(x-iK')+\frac{i\pi\omega}{2K}},$$

$$\chi(x, \omega) = \frac{H'(0)H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x-iK')+\frac{i\pi\omega}{2K}},$$

on en déduit facilement les relations suivantes :

$$\varphi(x, \omega+iK') = \chi(x, \omega),$$
$$\chi(x, \omega+iK') = \varphi(x, \omega),$$

dont nous ferons souvent usage. Cette propriété établie, nous rechercherons le développement, suivant les puissances croissantes de ε, de $\chi(iK'+\varepsilon)$, qui jouera plus tard un rôle important, et dont nous allons, comme on va voir, tirer l'équation différentielle que nous avons en vue. Pour le former, je partirai de l'égalité

$$D_x \log\chi(x) = \frac{H'(x+\omega)}{H(x+\omega)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},$$

d'où l'on déduit

$$D_\varepsilon \log\chi(iK'+\varepsilon) = \frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\omega+\varepsilon)} - \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Cela posé, nous aurons d'abord

$$\frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\varpi+\varepsilon)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \varepsilon D_\omega \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} D_\omega^2 \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \cdots;$$

mais, l'équation de Jacobi

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

donnant en général

$$D_x^{n+1} \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = - D_x^n k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

ce développement prend cette nouvelle forme

$$\frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\omega+\varepsilon)}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}=\varepsilon\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}-k^2\operatorname{sn}^2\omega\right)-\frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_\omega k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\mathrm{D}_\omega^2 k^2\operatorname{sn}^2\omega-\ldots.$$

Joignons-y le résultat qu'on tire de l'équation de M. Weierstrass :

$$\mathrm{H}(\varepsilon)=\mathrm{H}'(0)e^{\frac{\mathrm{J}\varepsilon^2}{2\mathrm{K}}}\mathrm{Al}(\varepsilon)_1,$$

en prenant la dérivée logarithmique des deux membres :

$$\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)}=\varepsilon\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}+\frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1},$$

et nous aurons

$$\mathrm{D}_\varepsilon\log\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)=-\varepsilon k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_\omega k^2\operatorname{sn}^2\omega-\ldots-\frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1},$$

d'où, par conséquent,

$$\begin{aligned}\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)&=\frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{\varepsilon^3}{2.3}\mathrm{D}_\omega k^2\operatorname{sn}^2\omega-\ldots}}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1}\\&=e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{\varepsilon^3}{2.3}\mathrm{D}_\omega k^2\operatorname{sn}^2\omega-\ldots}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1+k^2}{6}\varepsilon+\frac{7+8k^2+7k^4}{360}\varepsilon^3+\ldots\right),\end{aligned}$$

sans qu'il soit besoin d'introduire un facteur constant dans le second membre, puisque le premier terme de son développement est $\frac{1}{\varepsilon}$, comme il le faut d'après la nature de la fonction $\chi(x)$. Cette formule donne le résultat cherché par un calcul facile; elle montre qu'en posant

$$\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\Omega\varepsilon-\frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2-\frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3+\ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\Omega\ &=k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{1+k^2}{3},\\\Omega_1&=k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega,\\\Omega_2&=k^4\operatorname{sn}^4\omega-\frac{2(k^2+k^4)}{3}\operatorname{sn}^2\omega-\frac{7-22k^2+7k^4}{45},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En voici une première application.

VI.

Considérons, pour la décomposer en éléments simples, la fonction $k^2 \operatorname{sn}^2 x \chi(x)$, qui a les multiplicateurs de $\chi(x)$ et ne devient infinie que pour $x = iK'$. On devra, à cet effet, en posant $x = iK' + \varepsilon$, former la partie principale de son développement suivant les puissances croissantes de ε, que nous obtenons immédiatement en multipliant membre à membre les deux égalités

$$\chi(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3}(1 + k^2) + \ldots.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} k^2 \operatorname{sn}^2(iK' + \varepsilon)\chi(iK' + \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^3} + \left[\frac{1}{3}(1 + k^2) - \frac{1}{2}\Omega\right]\frac{1}{\varepsilon} + \ldots \\ &= \frac{1}{2}D_\varepsilon^2 \varepsilon^{-1} + \left[\frac{1}{2}(1 + k^2) - \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sn}^2\omega\right]\varepsilon^{-1} + \ldots, \end{aligned}$$

et l'on en conclut la formule suivante :

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x \chi(x) = \frac{1}{2}D_x^2 \chi(x) + \left[\frac{1}{2}(1 + k^2) - \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sn}^2\omega\right]\chi(x).$$

Elle montre que, en posant $y = \chi(x)$, nous obtenons une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2\omega)y,$$

qui est celle de Lamé dans le cas le plus simple où l'on suppose $n = 1$, la constante $h = -1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2\omega$ étant quelconque, puisque ω est arbitraire; et, comme cette équation ne change pas lorsqu'on change x en $-x$, la solution obtenue en donne une seconde, $y = \chi(-x)$, d'où, par suite, l'intégrale complète sous la forme

$$y = C\chi(x) + C'\chi(-x).$$

A ce résultat il est nécessaire de joindre ceux qu'on obtient quand on remplace successivement ω par $\omega + iK'$, $\omega + K$, $\omega + K + iK'$, ce qui conduit aux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right)y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right)y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}\right)y.$$

La première, d'après l'égalité $\chi(x, \omega + iK') = \varphi(x, \omega)$, a pour intégrale

$$y = C\varphi(x) + C'\varphi(-x);$$

et, en introduisant ces nouvelles fonctions, à savoir :

$$i\chi_1(x, \omega) = \chi(x, \omega + K),$$
$$i\varphi_1(x, \omega) = \varphi(x, \omega + K),$$

nous aurons, sous une forme semblable, pour la seconde et la troisième :

$$y = C\chi_1(x) + C'\chi_1(-x),$$
$$y = C\varphi_1(x) + C'\varphi_1(-x).$$

Les expressions de $\varphi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ s'obtiennent aisément à l'aide des fonctions $\Theta_1(x) = \Theta(x + K)$, $H_1(x) = H(x + K)$; on trouve ainsi

$$\varphi_1(x, \omega) = \frac{H'(0)\Theta_1(x+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{H'_1(\omega)}{H_1(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}},$$

$$\chi_1(x, \omega) = \frac{H'(0)H_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}}.$$

Nous allons en voir un premier usage dans la recherche des solutions de l'équation de Lamé par des fonctions doublement périodiques.

VII.

Nous supposons à cet effet $\omega = 0$ dans les équations précédentes, en exceptant toutefois celle où se trouve le terme $\frac{1}{\mathrm{sn}^2\omega}$ qui deviendrait infini. On obtient ainsi, pour la constante h, les déterminations suivantes :

$$h = -1 - k^2, \quad h = -1, \quad h = -k^2.$$

Ce sont précisément les quantités qu'on trouve en appliquant la méthode de Lamé; et en même temps nous tirons des valeurs des fonctions $\chi(x)$, $\chi_1(x)$, $\varphi_1(x)$, pour $\omega = 0$, les solutions auxquelles conduit son analyse :

$$y = \sqrt{k}\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad y = \sqrt{kk'}\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \quad y = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

ou, plus simplement, puisqu'on peut les multiplier par des facteurs constants,

$$y = \mathrm{sn}\, x, \quad y = \mathrm{cn}\, x, \quad y = \mathrm{dn}\, x.$$

Mais une circonstance se présente maintenant, qui demande un examen attentif. On ne peut plus, en effet, déduire de ces expressions d'autres qui en soient distinctes par le changement de signe de la variable, et il faut, par suite, employer une nouvelle méthode pour obtenir l'intégrale complète. Représentons, dans ce but, la solution générale de l'une quelconque de nos trois équations, en laissant ω indéterminé, par la formule

$$y = \mathrm{CF}(x, \omega) + \mathrm{C'F}(-x, \omega).$$

Je la mettrai d'abord sous cette forme équivalente

$$y = \mathrm{CF}(x, \omega) + \mathrm{C'F}(x, -\omega);$$

puis, en développant suivant les puissances croissantes de ω, je ferai

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \mathrm{F}_0(x) + \omega \mathrm{F}_1(x) + \omega^2 \mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

ce qui permettra d'écrire

$$y = (\mathrm{C} + \mathrm{C'})\mathrm{F}_0(x) + \omega(\mathrm{C} - \mathrm{C'})\mathrm{F}_1(x) + \omega^2(\mathrm{C} + \mathrm{C'})\mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

ou encore

$$y = \mathrm{C}_0 \mathrm{F}_0(x) + \mathrm{C}_1 \mathrm{F}_1(x) + \omega \mathrm{C}_0 \mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

en posant, d'après la méthode de d'Alembert,

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{C} + \mathrm{C'}, \quad \mathrm{C}_1 = \omega(\mathrm{C} - \mathrm{C'}).$$

Si l'on suppose maintenant $\omega = 0$, on parvient à la formule

$$y = \mathrm{C}_0 \mathrm{F}_0(x) + \mathrm{C}_1 \mathrm{F}_1(x),$$

qu'il faudra appliquer en faisant successivement

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \chi(x), \quad \mathrm{F}(x, \omega) = \chi_1(x), \quad \mathrm{F}(x, \omega) = \varphi_1(x);$$

mais le calcul sera plus simple si l'on prend

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} x},$$

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}_1(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} x},$$

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\Theta_1(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\mathrm{H}'_1(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)} x},$$

ces quantités ne différant des précédentes que par des facteurs constants. Observant donc que, pour $\omega = 0$, on a

$$D_\omega \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{J}{K}, \quad D_\omega \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{J}{K} - k^2, \quad D_\omega \frac{H'_1(\omega)}{H_1(\omega)} = \frac{J}{K} - 1,$$

nous obtenons immédiatement les valeurs que prennent leurs dérivées par rapport à ω, dans cette hypothèse de $\omega = 0$

$$F_1(x) = \frac{H'(x)}{\Theta(x)} - \frac{JH(x)}{K\Theta(x)} x,$$

$$F_1(x) = \frac{H'_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{(J - k^2K)H_1(x)}{K\Theta(x)} x,$$

$$F_1(x) = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{(J-K)\Theta_1(x)}{K\Theta(x)} x.$$

La solution générale de l'équation de Lamé, dans les cas particuliers que nous venons de considérer, peut donc se représenter par les formules suivantes :

1° $\quad h = -1 - k^2, \quad y = C \operatorname{sn} x + C' \operatorname{sn} x \left[\frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{J}{K} x\right],$

2° $\quad h = -1, \quad y = C \operatorname{cn} x + C' \operatorname{cn} x \left[\frac{H'_1(x)}{H_1(x)} - \frac{J - k^2K}{K} x\right],$

3° $\quad h = -k^2, \quad y = C \operatorname{dn} x + C' \operatorname{dn} x \left[\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - \frac{J-K}{K} x\right].$

VIII.

Un dernier point me reste à traiter avant d'aborder, au moyen des résultats qui viennent d'être obtenus, le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, dans le cas où il n'y a point de forces accélératrices. On a vu que les quantités $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\chi_1(x)$ sont les produits d'une exponentielle par les fonctions périodiques

$$\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{H'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{H'(0)\,H_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)},$$

développables par conséquent en séries simples de sinus et cosinus de multiples entiers de $\frac{\pi x}{2K}$. Ces séries ont été données pour la première fois par Jacobi, à l'occasion même de ses recherches sur la rotation ; et, comme l'observe l'illustre auteur, elles sont d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Je vais montrer comment on peut y parvenir au moyen de l'équation suivante :

$$\int_0^{2K} F(x_0+x)dx + \int_0^{2iK'} F(x_0+2K+x)dx \\ - \int_0^{2K} F(x_0+2iK'+x)dx - \int_0^{2iK'} F(x_0+x)dx = 2i\pi S,$$

ou, les quatre intégrales étant rectilignes, S représente la somme des résidus de la fonction $F(x)$ qui correspondent aux pôles situés à l'intérieur du rectangle dont les sommets ont pour affixes les quantités x_0, x_0+2K, $x_0+2K+2iK'$, x_0+2iK'. Supposons à cet effet qu'on ait :

$$F(x+2\,K) = \mu\, F(x),$$
$$F(x+2iK') = \mu' F(x),$$

on obtiendra la relation

$$(1-\mu')\int_0^{2K} F(x_0+x)dx - (1-\mu)\int_0^{2iK'} F(x_0+x)dx = 2i\pi S,$$

et si l'on admet en outre que le multiplicateur μ soit égal à l'unité, on en conclura le résultat suivant :

$$\int_0^{2K} F(x_0+x)dx = \frac{2i\pi S}{1-\mu'}.$$

Cela posé, soit, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$F(x) = \frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)}\, e^{-\frac{i\pi n x}{K}},$$

on aura

$$\mu = 1, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{K}(\omega+2niK')},$$

et, en limitant la constante x_0 de telle sorte que le pôle unique de $F(x)$ qui est à l'intérieur du rectangle soit $x = iK'$, nous obtiendrons pour le résidu correspondant, et par conséquent pour S, la valeur

$$S = e^{-\frac{i\pi}{2K}(\omega+2niK')}.$$

De là résulte, pour l'intégrale définie, l'expression suivante :

$$\int_0^{2K} F(x_0+x)\,dx = \frac{2i\pi e^{-\frac{i\pi}{2K}(\omega+2niK')}}{1-e^{-\frac{i\pi}{K}(\omega+2niK')}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+2niK')},$$

et l'on voit qu'en posant l'équation

$$\frac{H'(0)\,\Theta(x_0+x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x_0+x)} = \sum A_n e^{\frac{i\pi n(x_0+x)}{K}},$$

on en déduit immédiatement la détermination de A_n. Nous avons, en effet,

$$2KA_n = \int_0^{2K} F(x_0+x)\,dx,$$

et, par conséquent,

$$\frac{2K}{\pi}A_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+2niK')}.$$

La constante x_0 que j'ai introduite pour plus de généralité, et aussi pour éviter qu'un pôle de $F(x)$ se trouve sur le contour d'intégration, peut maintenant sans difficulté être supposée nulle. Nous parvenons ainsi à une première formule de développement :

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi nx}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+2niK')},$$

dont les trois autres résultent, comme on va le voir. Qu'on change, en effet, ω en $\omega + iK'$, on en conclura d'abord

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}e^{-\frac{i\pi x}{2K}} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi nx}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[\omega+(2n+1)iK']};$$

puis, en multipliant les deux membres par l'exponentielle, et posant $m = 2n+1$,

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi mx}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')}.$$

Mettons enfin, dans les deux formules que nous venons d'établir,

$\omega + \mathrm{K}$ à la place de $\overset{\omega}{\cancel{\mathrm{K}}}$, et l'on obtiendra les suivantes, qui nous restaient à trouver :

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + 2ni\mathrm{K}')},$$

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + mi\mathrm{K}')}.$$

Voici à leur sujet quelques remarques.

IX.

Elles sont d'une forme différente de celles de Jacobi et l'on peut s'en servir utilement dans beaucoup de questions que je ne puis aborder en ce moment. Je me contenterai, sans en faire l'étude, d'indiquer succinctement comment on en tire les sommes des séries suivantes :

$$\Sigma f(2ni\mathrm{K}')\,e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}, \quad \Sigma f(mi\mathrm{K}')\,e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}},$$

où $f(z)$ est une fonction rationnelle de $\sin\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}$ et $\cos\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}$, sans partie entière et assujettie à la condition $f(z+2\mathrm{K}) = -f(z)$. Il suffit, en effet, d'employer la décomposition de cette fonction en éléments simples, c'est-à-dire en termes tels que $\mathrm{D}_z^{\alpha}\,\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\omega)}$, pour obtenir immédiatement la valeur des séries proposées, au moyen de ces deux expressions :

$$\Sigma \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + 2ni\mathrm{K}')}\right] e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}} = \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)},$$

$$\Sigma \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + mi\mathrm{K}')}\right] e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}} = \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}.$$

J'ajouterai encore qu'on retrouve les résultats de Jacobi, si l'on réunit les termes qui correspondent à des valeurs de l'indice égales et de signes contraires. Il vient ainsi, en effet, en désignant par m un nombre qu'on fera successivement pair et impair,

$$\frac{e^{\frac{i\pi m x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')}+\frac{e^{-\frac{i\pi m x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega-miK')}=\frac{2\cos\frac{m\pi x}{2K}\cos\frac{m\pi iK'}{2K}\sin\frac{\pi\omega}{2K}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')\sin\frac{\pi}{2K}(\omega-miK')}$$
$$-i\frac{2\sin\frac{m\pi x}{2K}\sin\frac{m\pi iK'}{2K}\cos\frac{\pi\omega}{2K}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')\sin\frac{\pi}{2K}(\omega-miK')};$$

employons ensuite les équations de la page 85 des *Fundamenta*, qui donnent :

$$\cos\frac{m\pi iK'}{2K}=\frac{1+q^m}{2\sqrt{q^m}},$$
$$\sin\frac{m\pi iK'}{2K}=i\frac{1-q^m}{2\sqrt{q^m}},$$
$$\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')\sin\frac{\pi}{2K}(\omega-miK')=\frac{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{K}+q^{2m}}{4q^m},$$

et nous parviendrons à cette nouvelle forme :

$$\frac{e^{\frac{i\pi m x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega+miK')}+\frac{e^{-\frac{i\pi m x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega-miK')}=\frac{4\sqrt{q^m}(1+q^m)\sin\frac{\pi\omega}{2K}}{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{K}+q^{2m}}\cos\frac{m\pi x}{2K}$$
$$+\frac{4\sqrt{q^m}(1-q^m)\cos\frac{\pi\omega}{2K}}{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{K}+q^{2m}}\sin\frac{m\pi x}{2K}.$$

C'est celle qu'on voit dans la lettre adressée à l'Académie des Sciences et publiée dans les *Comptes rendus* du 30 juillet 1849; car, en introduisant la constante $b=\frac{i\omega}{K'}$, on peut écrire

$$\sin\frac{\pi\omega}{2K}=\frac{-q^{\frac{1}{2}b}+q^{-\frac{1}{2}b}}{2i},$$
$$\cos\frac{\pi\omega}{2K}=\frac{q^{\frac{1}{2}b}+q^{-\frac{1}{2}b}}{2}$$

et

$$1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{K}+q^{2m}=(1-q^{m+b})(1-q^{m-b}).$$

Mais une faute d'impression, reproduite dans les *Œuvres complètes*, t. II, p. 143, et dans le *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 297, s'est glissée dans ces formules. Les équations (3), (4), (5), (6) renferment en effet les quantités $\sqrt{q(1+q)}$, $\sqrt{q^3(1+q^3)}$, ... et $\sqrt{q(1-q)}$, $\sqrt{q^3(1-q^3)}$, ..., qui doivent être remplacées par $\sqrt{q}(1+q)$, $\sqrt{q^3}(1+q^3)$, ... et $\sqrt{q}(1-q)$, $\sqrt{q^3}(1-q^3)$, ... On peut d'ailleurs parvenir par d'autres méthodes à ces résultats importants. M. Somoff les obtient en décomposant la quantité

$$\frac{(1-qvz)(1-q^3vz)(1-q^5vz)\ldots(1-qv^{-1}z^{-1})(1-q^3v^{-1}z^{-1})(1-q^5v^{-1}z^{-1})\ldots}{(z-1)(1-q^2z)(1-q^4z)\ldots(1-q^2z^{-1})(1-q^4z^{-1})\ldots}$$

en fractions simples :

$$\frac{A_0}{z-1}+\Sigma\frac{A_m}{1-q^{2m}z}+\Sigma\frac{B_m}{z-q^{2m}}.$$

Le P. Joubert m'a communiqué la remarque qu'on peut, en suivant la même marche, partir de ces expressions finies :

$$\frac{z(z-q^{1-b})(z-q^{3-b})\ldots(z-q^{2n-1-b})(1-q^{1+b}z)(1-q^{3+b}z)\ldots(1-q^{2n-1+b}z)}{(z-q)(z-q^3)\ldots(z-q^{2n+1})(1-qz)(1-q^3z)\ldots(1-q^{2n+1}z)},$$
$$\frac{z(z-q^{2-b})(z-q^{4-b})\ldots(z-q^{2n-b})(1-q^{2+b}z)(1-q^{4+b}z)\ldots(1-q^{2n+b}z)}{(z-q)(z-q^3)\ldots(z-q^{2n+1})(1-qz)(1-q^3z)\ldots(1-q^{2n+1}z)};$$

et faire ensuite grandir indéfiniment le nombre n.

Enfin, et en dernier lieu, je remarque qu'au moyen de la formule

$$\int_0^{2K}F(x_0+x)\,dx=\frac{2i\pi S}{1-\mu},$$

qui a été le point de départ de mon procédé, nous pouvons très-simplement démontrer les relations établies au § IV, p. 11 :

$$\int_0^{2K}\frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)}\,dx=0,$$
$$\int_0^{2K}\frac{H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta^2(x)}\,dx=0,$$

où a et b désignent, dans la première, deux racines de l'équation $H'(x)=0$, et dans la seconde, deux racines de l'équation $\Theta'(x)=0$. Si l'on prend, en effet, successivement

$$F(x)=\frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)},$$
$$F(x)=\frac{H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

on aura $\mu = 1$ et μ' différant de l'unité, sauf la supposition que nous excluons de $b = -a$. On obtient d'ailleurs, dans le premier cas,

$$S = \frac{H(a)H'(b) + H(b)H'(a)}{H'^2(0)}\sqrt{\mu'},$$

et, dans le second,

$$S = \frac{\Theta(a)\Theta'(b) + \Theta(b)\Theta'(a)}{H'^2(0)}\sqrt{\mu'},$$

de sorte que, sous les conditions admises, les deux valeurs de S s'évanouissent. Cela étant, nous pouvons, dans la relation ainsi démontrée

$$\int_0^{2K} F(x_0 + x)dx = 0,$$

supposer $x_0 = 0$; car l'intégrale est une fonction continue de x_0, non-seulement dans le voisinage de cette valeur particulière, mais dans l'intervalle des deux parallèles à l'axe des abscisses, menées à la même distance K' au-dessus et au-dessous de cet axe.

X.

Dans la théorie de la rotation d'un corps autour d'un point fixe O, le mouvement d'un point quelconque du solide se détermine en rapportant ce point aux axes principaux d'inertie Ox', Oy', Oz', immobiles dans le corps, mais entraînés par lui, et dont on donne la position à un instant quelconque par rapport à des axes fixes Ox, Oy, Oz, le plan des xy étant le plan invariable et l'axe Oz la perpendiculaire à ce plan. Soient donc x, y, z les coordonnées d'un point du corps par rapport aux axes fixes, et ξ, η, ζ les coordonnées par rapport aux axes mobiles; ces quantités seront liées par les relations

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}$$

et la question consiste à obtenir en fonction du temps les neuf coefficients a, b, c, ... Jacobi le premier en a donné une solution complète et définitive, qui offre l'une des plus belles applications de calcul à la Mécanique et ouvre en même temps des voies nouvelles dans la théorie des fonctions elliptiques. C'est à l'étude des résultats si importants découverts par l'immortel géomètre que je dois les recherches exposées dans ce travail, et tout d'abord l'intégration de l'équation de Lamé, dans le cas dont je viens de m'occuper, où l'on suppose $n = 1$; on va voir en effet comment la théorie de la rotation, lorsqu'il n'y a point de forces accélératrices, se trouve étroitement liée à cette équation.

Pour cela je partirai des relations suivantes, données dans le tome II du *Traité de Mécanique* de Poisson, p. 135 :

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q,$$

$$\frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \quad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r,$$

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp, \quad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, \quad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p,$$

dans lesquelles p, q, r sont les composantes rectangulaires de la vitesse de rotation, par rapport aux mobiles Ox', Oy', Oz'. Cela étant, des conditions connues

$$p = \alpha a'', \quad q = \beta b'', \quad r = \gamma c'',$$

où α, β, γ sont des constantes, on tire immédiatement les équations

$$\frac{da''}{dt} = (\gamma - \beta)\, b''c'', \quad \frac{db''}{dt} = (\alpha - \gamma)\, c''a'', \quad \frac{dc''}{dt} = (\beta - \alpha)\, a''b'',$$

dont une première intégrale algébrique est donnée par l'égalité

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

et une seconde intégrale par celle-ci :

$$\alpha a''^2 + \beta b''^2 + \gamma c''^2 = \delta,$$

δ étant une constante arbitraire. Ces quantités α, β, γ, δ sont liées aux constantes A, B, C, h, l du Mémoire de Jacobi, par les relations

$$\alpha = \frac{l}{A}, \quad \beta = \frac{l}{B}, \quad \gamma = \frac{l}{C}, \quad \delta = \frac{h}{l};$$

elles sont donc du signe de l qui peut être positif ou négatif, comme représentant le moment d'impulsion dans le plan invariable. Dans ces deux cas, β sera compris entre α et γ, puisqu'on suppose B compris entre A et C;

mais j'admettrai, pour fixer les idées, que l soit positif. On voit de plus que, δ étant une moyenne entre α, β, γ, peut être plus grand ou plus petit que β : la première hypothèse donne $Bh > l^2$, et Jacobi suppose alors $A > B > C$; dans la seconde, on a $Bh < l^2$, avec $A < B < C$; ces conditions prendront, avec nos constantes, la forme suivante :

I. $$\alpha < \beta < \delta < \gamma,$$

II. $$\alpha > \beta > \delta > \gamma,$$

et nous allons immédiatement en faire usage en recherchant les expressions des coefficients a'', b'', c'', par des fonctions elliptiques du temps.

XI.

J'observe, en premier lieu, qu'on obtient, si l'on exprime a'' et c'' au moyen de b'', les valeurs

$$(\gamma - \alpha)\, a''^2 = \gamma - \delta - (\gamma - \beta)\, b''^2, \quad (\gamma - \alpha)\, c''^2 = \delta - \alpha - (\beta - \alpha)\, b''^2.$$

Posons maintenant

$$a''^2 = \frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha} \mathrm{V}^2, \quad b''^2 = \frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta} \mathrm{U}^2, \quad c''^2 = \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \mathrm{W}^2,$$

puis

$$k^2 = \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - \delta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)};$$

il viendra plus simplement

$$\mathrm{V}^2 = 1 - \mathrm{U}^2, \quad \mathrm{W}^2 = 1 - k^2 \mathrm{U}^2.$$

Introduisons, en outre, la quantité $n^2 = (\delta - \alpha)(\gamma - \beta)$; l'équation $\frac{db''}{dt} = (\alpha - \gamma)\, c'' a''$ prend cette forme : $\frac{d\mathrm{U}}{dt} = n\mathrm{VW}$, et l'on en conclut, en désignant par t_0 une constante arbitraire,

$$\mathrm{U} = \mathrm{sn}[n(t - t_0), k], \quad \mathrm{V} = \mathrm{cn}[n(t - t_0), k], \quad \mathrm{W} = \mathrm{dn}[n(t - t_0), k].$$

J'ajoute que les quantités $\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}$, $\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}$, $\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}$, $(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)$ sont toutes positives et que k^2 est positif et moindre que l'unité, sous les conditions I et II. A l'égard du module il suffit en effet de remarquer que l'identité

$$(\delta - \alpha)(\gamma - \beta) = (\gamma - \alpha)(\delta - \beta) + (\beta - \alpha)(\gamma - \delta)$$

donne

$$k'^2 = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

de sorte que k^2 et k'^2, étant évidemment positifs, sont par cela même tous deux inférieurs à l'unité. Ce point établi, désignons par $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ des facteurs égaux à ± 1; en convenant de prendre dorénavant les racines carrées avec le signe $+$, nous pourrons écrire

$$a'' = \varepsilon\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}}\,\mathrm{V}, \quad b'' = \varepsilon'\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}\,\mathrm{U}, \quad c'' = \varepsilon''\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\,\mathrm{W},$$

et la substitution dans les équations

$$\frac{da''}{dt} = (\gamma-\beta)\,b''c'', \quad \frac{db''}{dt} = (\alpha-\gamma)\,c''a'', \quad \frac{dc''}{dt} = (\beta-\alpha)a''b''$$

donnera les conclusions suivantes. Admettons d'abord les conditions I : les trois différences $\gamma-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\alpha$ seront négatives, et l'on trouvera $\varepsilon = -\varepsilon'\varepsilon''$, $\varepsilon' = -\varepsilon''\varepsilon$, $\varepsilon'' = -\varepsilon\varepsilon'$; mais sous les conditions II, ces mêmes quantités étant positives, nous aurons $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon''$, $\varepsilon' = \varepsilon''\varepsilon$, $\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$; ainsi, en faisant, avec Jacobi, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, on voit qu'il faudra prendre $\varepsilon'' = +1$ dans le premier cas et la valeur contraire $\varepsilon'' = -1$ dans le second. Cela posé, et en convenant toujours que les racines carrées soient positives, je dis qu'on peut déterminer un argument ω par les deux conditions

$$\operatorname{cn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\delta}}, \quad \operatorname{dn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}};$$

d'où nous tirons $\frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} = \sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}$; ces quantités satisfont en effet à la relation

$$\operatorname{dn}^2\omega - k^2\operatorname{cn}^2\omega = k'^2,$$

comme on le vérifie aisément. Je remarque, en outre, que, $\operatorname{cn}\omega$ et $\operatorname{dn}\omega$ étant des fonctions paires, on peut encore à volonté disposer du signe de ω. Or, ayant $\frac{\operatorname{sn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} = \frac{\alpha-\delta}{\gamma-\alpha}$, nous fixerons ce signe de manière que, suivant les conditions I ou II, $\frac{\operatorname{sn}\omega}{i\operatorname{cn}\omega}$, qui est une fonction impaire, soit égal à $+\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}$ ou à $-\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}$. Nous éviterons, en définissant la constante ω comme on vient de le faire, les doubles signes qui figurent dans les relations de Jacobi; ainsi, à l'égard de a'', b'', c'', on aura, dans tous les cas, les formules suivantes, où je fais pour abréger $u = n(t - t_0)$:

$$a'' = -\frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cn}\, \omega}, \quad b'' = \frac{\mathrm{dn}\, \omega\, \mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, \omega}, \quad c'' = \frac{\mathrm{sn}\, \omega\, \mathrm{dn}\, u}{i\, \mathrm{cn}\, \omega}.$$

Enfin il est facile de voir que $\omega = iv$, v étant réel; de la formule cn $\cancel{\mathrm{sn}}(iv, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(v, k')}$, on conclut, en effet, $\mathrm{cn}(v, k') = \sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}$, valeur qui est dans les deux cas non-seulement réelle, mais moindre que l'unité.

XII.

J'aborde maintenant la détermination des six coefficients a, b, c, a', b', c' en introduisant les quantités

$$\mathrm{A} = a + ia', \quad \mathrm{B} = b + ib', \quad \mathrm{C} = c + ic',$$

et partant des relations suivantes :

$$\mathrm{A}a'' + \mathrm{B}b'' + \mathrm{C}c'' = 0,$$
$$i\mathrm{A} - \mathrm{B}c'' + \mathrm{C}b'' = 0,$$

qu'il est facile de démontrer. La première est une suite des égalités

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

et la seconde résulte de celles-ci :

$$a = b'c'' - c'b'', \quad a' = b''c - c''b, \quad a'' = bc' - cb', \quad \ldots.$$

Qu'on prenne, en effet, les valeurs de a et a', on en déduira

$$a + ia' = (b' - ib)c'' - b''(c' - ic),$$

ce qui revient bien à la relation énoncée. Cela posé, je fais usage des équations de Poisson rappelées plus haut, et qui donnent

$$\mathrm{D}_t\mathrm{A} = \mathrm{B}r - \mathrm{C}q, \quad \mathrm{D}_t\mathrm{B} = \mathrm{C}p - \mathrm{A}r, \quad \mathrm{D}_t\mathrm{C} = \mathrm{A}q - \mathrm{B}p,$$

puis, en remplaçant p, q, r par $\alpha a''$, $\beta b''$, $\gamma c''$,

$$\mathrm{D}_t\mathrm{A} = \mathrm{B}c''\gamma - \mathrm{C}b''\beta, \quad \mathrm{D}_t\mathrm{B} = \mathrm{C}a''\alpha - \mathrm{A}c''\gamma, \quad \mathrm{D}_t\mathrm{C} = \mathrm{A}b''\beta - \mathrm{B}a''\alpha.$$

Mettons maintenant dans la première les expressions de B et C en A, qu'on tire de nos deux relations, à savoir

$$B = \frac{a''b'' - ic''}{a''^2 - 1} A, \quad C = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2 - 1} A,$$

on obtiendra aisément

$$\frac{D_t A}{A} = \frac{(\gamma - \beta) a''b''c'' - i(\gamma c''^2 + \beta b''^2)}{a''^2 - 1},$$

ou bien encore

$$\frac{D_t A}{A} = \frac{a'' D_t a'' + i(\alpha a''^2 - \delta)}{a''^2 - 1},$$

et, par un simple changement de lettres, on en conclut, sans nouveau calcul,

$$\frac{D_t B}{B} = \frac{b'' D_t b'' + i(\beta b''^2 - \delta)}{b''^2 - 1},$$

$$\frac{D_t C}{C} = \frac{c'' D_t c'' + i(\gamma c''^2 - \delta)}{c''^2 - 1}.$$

Ces formules seront plus simples si l'on fait

$$A = \mathfrak{a} e^{i\alpha t}, \quad B = \mathfrak{b} e^{i\beta t}, \quad C = \mathfrak{c} e^{i\gamma t};$$

car il vient ainsi

$$\frac{D_t \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} = \frac{a'' D_t a'' + i(\alpha - \delta)}{a''^2 - 1},$$

$$\frac{D_t \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} = \frac{b'' D_t b'' + i(\beta - \delta)}{b''^2 - 1},$$

$$\frac{D_t \mathfrak{c}}{\mathfrak{c}} = \frac{c'' D_t c'' + i(\gamma - \delta)}{c''^2 - 1}.$$

Cela étant, j'envisage la première, et pour un instant je pose $a''^2 - 1 = a^2$, ce qui donnera

$$\frac{D_t \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} = \frac{a D_t a + i(\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{D_t a}{a} + i\frac{\alpha - \delta}{a^2}.$$

On en conclut ensuite, en différentiant,

$$\frac{D_t^2 \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} - \left(\frac{D_t \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}\right)^2 = \frac{D_t^2 a}{a} - \left(\frac{D_t a}{a}\right)^2 - 2i\frac{(\alpha - \delta) D_t a}{a^3};$$

puis encore, par l'élimination de $\frac{D_t \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}$,

$$\frac{D_t^2 \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} = \frac{D_t^2 a}{a} - \frac{(\alpha - \delta)^2}{a^4};$$

mais, comme conséquence de l'équation différentielle,

$$(D_t a'')^2 = (\gamma - \beta)^2 b''^2 c''^2 = [\delta - \beta - (\alpha - \beta) a''^2][\gamma - \delta - (\gamma - \alpha) a''^2],$$

on a la suivante :

$$\frac{\mathfrak{a}^2}{1+\mathfrak{a}^2}(D_t \mathfrak{a})^2 = -(\delta - \alpha)^2 - (\delta - \alpha)(\beta + \gamma - 2\alpha)\mathfrak{a}^2 - (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)\mathfrak{a}^4,$$

qui peut s'écrire

$$(D_t \mathfrak{a})^2 + \frac{(\delta - \alpha)^2}{\mathfrak{a}^2}$$
$$= -(\delta - \alpha)^2 - (\delta - \alpha)(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 + \mathfrak{a}^2) - (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^4).$$

Or on en tire, en différentiant et divisant ensuite les deux membres par $2\mathfrak{a} D_t \mathfrak{a}$,

$$\frac{D_t^2 \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} - \frac{(\delta - \alpha)^2}{\mathfrak{a}^4}$$
$$= -[(\delta - \alpha)(\beta + \gamma - 2\alpha) + (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)] - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\mathfrak{a}^2.$$

Nous avons donc, après avoir remplacé $\mathfrak{a}^2$ par $a''^2 - 1$,

$$\frac{D_t^2 \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} = (\beta - \alpha)(\gamma - \delta) - (\delta - \alpha)(\gamma - \alpha) - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) a''^2;$$

c'est le résultat que j'avais en vue d'obtenir.

XIII.

Deux voies s'ouvrent maintenant pour parvenir aux expressions de A, B, C; voici d'abord la plus élémentaire. Revenant aux formules

$$B = \frac{a''b'' - ic''}{a''^2 - 1} A, \quad C = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2 - 1} A,$$

je remplace a'', b'', c'' par les valeurs obtenues au § XI, page 27 :

$$a'' = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, \quad b'' = \frac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega}, \quad c'' = \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega},$$

et, au moyen des relations relatives à l'addition des arguments, j'obtiens ces résultats :

$$\frac{a''b''-ic''}{a''^2-1}=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}\omega+\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2\omega}=\frac{\operatorname{cn}(u-\omega)}{\operatorname{sn}(u-\omega)},$$

$$\frac{a''c''+ib''}{a''^2-1}=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega+\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{i(\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2\omega)}=\frac{1}{i\operatorname{sn}(u-\omega)},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$B=\frac{\operatorname{cn}(u-\omega)}{\operatorname{sn}(u-\omega)}A,\quad C=\frac{A}{i\operatorname{sn}(u-\omega)}.$$

Cela posé, j'envisage l'expression

$$\frac{D_t a}{a}=\frac{a''D_t a''+i(\alpha-\delta)}{a''^2-1}=\frac{(\gamma-\beta)a''b''c''+i(\alpha-\delta)}{a''^2-1}$$

et je fais le même calcul, après avoir remplacé $\gamma-\beta$ et $\alpha-\delta$ par les valeurs suivantes :

$$\gamma-\beta=in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega},\quad \alpha-\delta=in\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega},$$

qu'on tire facilement des équations posées page 26 :

$$\operatorname{cn}\omega=\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\delta}},\quad \operatorname{dn}\omega=\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}},\quad \operatorname{sn}\omega=i\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\delta}}$$

et de $n=\sqrt{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}$. L'expression à laquelle nous parvenons ainsi,

$$\frac{D_t a}{a}=n\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u+\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2\omega},$$

nous offre une fonction doublement périodique, dont les périodes sont $2K$, $2iK'$, et qui a deux pôles, $u=\omega$, $u=iK'$. Les résidus correspondant à ces pôles étant $+1$ et -1, la décomposition en éléments simples donne immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u+\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2\omega}=\frac{H'(u-\omega)}{H(u-\omega)}-\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+C,$$

et la constante se détermine en faisant, par exemple, $u=0$; on obtient de cette manière :

$$C=\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}-\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}=\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Nous pouvons donc écrire, après avoir pris pour variable $u = n(t - t_0)$,

$$\frac{D_u a}{a} = \frac{H'(u-\omega)}{H(u-\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},$$

et, si l'on désigne par $Ne^{i\nu}$ une nouvelle constante à laquelle nous donnons cette forme, parce qu'elle doit être, en général, supposée imaginaire, on aura

$$a = Ne^{i\nu}\frac{H(u-\omega)}{\Theta(u)}e^{\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}.$$

De cette formule résulte ensuite

$$A = Ne^{i(\nu+\alpha t_0)}\frac{H(u-\omega)}{\Theta(u)}e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

ou plus simplement, en mettant $\nu - \alpha t_0$ au lieu de ν,

$$A = Ne^{i\nu}\frac{H(u-\omega)}{\Theta(u)}e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

et l'on en conclut immédiatement

$$B = \frac{\operatorname{cn}(u-\omega)}{\operatorname{sn}(u-\omega)}A = \sqrt{k'}Ne^{i\nu}\frac{H_1(u-\omega)}{\Theta(u)}e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

$$C = \frac{1}{i\operatorname{sn}(u-\omega)}A = \sqrt{k}Ne^{i\nu}\frac{\Theta(u-\omega)}{i\Theta(u)}e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Des deux indéterminées N et ν qui figurent dans ces expressions, la dernière seule subsistera comme quantité arbitraire; N, qui est réel et positif, se détermine comme nous allons le montrer.

XIV.

Je fais à cet effet, pour plus de simplicité, dans les expressions précédentes,

$$\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = i\lambda,$$

en observant que cette quantité λ est réelle, car on a $\omega = iv$, ainsi que nous l'avons fait voir (p. 27). Cela étant, nous pouvons écrire

$$\mathrm{A} = \sqrt{k}\mathrm{N}\frac{\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{\Theta(u)}\operatorname{sn}(u-\omega),$$
$$\mathrm{B} = \sqrt{k}\mathrm{N}\frac{\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{\Theta(u)}\operatorname{cn}(u-\omega),$$
$$\mathrm{C} = \sqrt{k}\mathrm{N}\frac{\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{i\Theta(u)},$$

et je remarque tout d'abord que ces formules permettent de vérifier facilement les conditions auxquelles doivent satisfaire les neuf coefficients a, b, c, ... En premier lieu, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}a'' + \mathrm{B}b'' + \mathrm{C}c'' = \sqrt{k}\mathrm{N}\frac{\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{\operatorname{cn}\omega\,\Theta(u)}[&-\operatorname{cn}u\operatorname{sn}(u-\omega)\\ &+\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u\operatorname{cn}(u-\omega) - \operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u].\end{aligned}$$

Or on a

$$\operatorname{cn}u\operatorname{sn}(u-\omega) - \operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u\operatorname{cn}(u-\omega) + \operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u = 0,$$

cette équation étant l'une des relations fondamentales pour l'addition des arguments [JACOBI, *OEuvres complètes*, t. II, p. 171, équation (16)], et nous obtenons ainsi :

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$

Je remarque ensuite que la somme des carrés $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2$ s'évanouit comme contenant en facteur $\operatorname{sn}^2(u-\omega) + \operatorname{cn}^2(u-\omega) - 1$, et nous en concluons

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

» Ayant d'ailleurs

$$\begin{aligned}a''^2 + b''^2 + c''^2 &= \left(\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{cn}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}\omega}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}\omega}\right)^2\\ &= \frac{1-\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{cn}^2\omega} + \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2\omega)\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{cn}^2\omega} - \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2u)\operatorname{sn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} = 1,\end{aligned}$$

les six relations que nous avons en vue seront complétement vérifiées dès que N sera déterminé de manière à obtenir $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ [1]. Formons

---

(1) Les équations

$$i\mathrm{A} = \mathrm{B}c'' - \mathrm{C}b'', \quad i\mathrm{B} = \mathrm{C}a'' - \mathrm{A}c'', \quad i\mathrm{C} = \mathrm{A}b'' - \mathrm{B}a'',$$

pour cela les carrés des modules de A, B, C; en remarquant que, par le changement de i en $-i$, ω se change en $-\omega$, on trouve immédiatement

$$a^2 + a'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)} \operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega),$$
$$b^2 + b'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)} \operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega),$$
$$c^2 + c'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)};$$

---

dont la première a été employée précédemment, page 27, et qui contiennent les suivantes :

$$a = b'c'' - c'b'', \quad b = c'a'' - a'c'', \quad c = a'b'' - b'a'';$$
$$a' = b''c - c''b, \quad b' = c''a - a''c, \quad c' = a''b - b''a,$$

se vérifient aussi de la manière la plus facile. Les relations auxquelles elles conduisent, à savoir :

$$\operatorname{cn}\omega = \operatorname{cn}u \operatorname{cn}(u-\omega) + \operatorname{dn}\omega \operatorname{sn}u \operatorname{sn}(u-\omega),$$
$$\operatorname{cn}u = \operatorname{cn}\omega \operatorname{cn}(u-\omega) - \operatorname{dn}\omega \operatorname{sn}u \operatorname{sn}(u-\omega),$$
$$\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn}u = \operatorname{cn}\omega \operatorname{sn}(u-\omega) + \operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}u \operatorname{cn}(u-\omega),$$

figurent, en effet, dans le tableau donné par Jacobi sous les n^{os} 9, 10 et 11. Formons enfin les trois produits

$$(b - ib')(c + ic'), \quad (c - ic')(a + ia'), \quad (a - ia')(b + ib'),$$

nous trouverons

$$(b - ib')(c + ic') = \frac{\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)}\, i,$$
$$(c - ic')(a + ia') = \frac{\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0)\Theta(u+\omega)\mathrm{H}(u-\omega)}{i\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)},$$
$$(a - ia')(b + ib') = \frac{\Theta(0)\Theta_1(0)\mathrm{H}(u+\omega)\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)};$$

or les relations élémentaires

$$\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(u+\omega)\Theta(u-\omega) = \mathrm{H}(\omega)\Theta_1(\omega)\mathrm{H}(u)\Theta_1(u) - \mathrm{H}_1(\omega)\Theta(\omega)\Theta(u)\mathrm{H}_1(u),$$
$$\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0)\Theta(u+\omega)\mathrm{H}(u-\omega) = \mathrm{H}(\omega)\Theta(\omega)\mathrm{H}_1(u)\Theta_1(u) - \mathrm{H}_1(\omega)\Theta_1(\omega)\Theta(u)\mathrm{H}(u),$$
$$\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}(u+\omega)\mathrm{H}_1(u-\omega) = \Theta(\omega)\Theta_1(\omega)\mathrm{H}(u)\mathrm{H}_1(u) + \mathrm{H}(\omega)\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)\Theta_1(u)$$

conduisent facilement à ces égalités

$$(b - ib')(c + ic') = -b''c'' + ia'',$$
$$(c - ic')(a + ia') = -c''a'' + ib'',$$
$$(a - ia')(b + ib') = -a''b'' + ic'';$$

d'où l'on tire ce nouveau système de conditions :

$$bc + b'c' + b''c'' = 0, \quad bc' - cb' = a'',$$
$$ca + c'a' + c''a'' = 0, \quad ca' - ac' = b'',$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ab' - ba' = c''.$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$2 = kN^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)}[\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega) + \operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega) + 1].$$

Or les formules élémentaires

$$\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega},$$

$$\operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega) = -1 + \frac{\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn}^2\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega}$$

donnent

$$\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega) + \operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega) + 1 = \frac{2\operatorname{cn}^2\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega}$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\Theta^2(0)\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)\Theta^2(\omega)} = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega;$$

nous obtenons donc

$$1 = kN^2\frac{\Theta^2(\omega)\operatorname{cn}^2\omega}{\Theta^2(0)},$$

et par conséquent, après une réduction facile,

$$N = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(\omega)}.$$

On en conclut les résultats de Jacobi, que nous gardons sous la forme suivante :

$$a + ia' = \frac{\Theta_1(0)H(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\Theta(u)},$$

$$b + ib' = \frac{\Theta(0)H_1(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\Theta(u)},$$

$$c + ic' = \frac{H_1(0)\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{iH_1(\omega)\Theta(u)},$$

et il ne nous reste plus qu'à y joindre les expressions des vitesses de rotation autour des axes fixes Ox, Oy, Oz.

Ces quantités, que je désignerai par v, v', v'', ont pour valeurs

$$v = ap + bq + cr,$$
$$v' = a'p + b'q + c'r,$$
$$v'' = a''p + b''q + c''r,$$

ou encore, en remplaçant p, q, r par $\alpha a''$, $\beta b''$, $\gamma c''$,

$$\begin{aligned} v &= aa''\alpha + bb''\beta + cc''\gamma, \\ v' &= a'a''\alpha + b'b''\beta + c'c''\gamma, \\ v'' &= a''^2\alpha + b''^2\beta + c''^2\gamma = \delta. \end{aligned}$$

Cela posé, soit $v + iv' = \mathrm{V}$, nous pouvons écrire

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}a''\alpha + \mathrm{B}b''\beta + \mathrm{C}c''\gamma,$$

et, si nous employons de nouveau les égalités

$$\mathrm{B} = \frac{a''b'' - ic''}{a'' - 1}\mathrm{A}, \quad \mathrm{C} = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2 - 1}\mathrm{A},$$

on obtiendra la formule

$$\mathrm{V} = \frac{(\delta - \alpha)a'' + i(\gamma - \beta)b''c''}{a''^2 - 1}\mathrm{A}.$$

Or, au moyen des relations

$$\delta - \alpha = -in\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}, \quad \gamma - \beta = in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}$$

et des valeurs de a'', b'', c'', il vient

$$\frac{(\delta - \alpha)a'' + i(\gamma - \beta)b''c''}{a''^2 - 1} = -in\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}\omega + \operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega} = -in\frac{\operatorname{dn}(u - \omega)}{\operatorname{sn}(u - \omega)};$$

l'expression précédente de A nous donne donc immédiatement

$$\mathrm{V} = -in\frac{\mathrm{H}'(0)\Theta_1(u - \omega)e^{i(\lambda u + \nu)}}{\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)}.$$

Voici maintenant la seconde méthode que j'ai annoncée pour parvenir à la détermination des quantités A, B, C.

XV.

Je reprends l'équation différentielle du second ordre, obtenue au § XII, p. 29, à savoir :

$$\mathrm{D}_t^2 a = [(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) - (\delta - \alpha)(\gamma - \alpha) - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)a''^2]a,$$

et j'y joins les deux suivantes, qui s'en tirent par un changement de lettres :

$$D_t^2 b = [(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)-(\delta-\beta)(\alpha-\beta)-2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)b''^2]b,$$
$$D_t^2 c = [(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)-(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)-2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)c''^2]c.$$

Cela posé, au moyen des expressions de a'', b'', c'', en fonction de u, et de ces formules qu'on établit sans peine,

$$\alpha-\beta = in\frac{k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega},\quad \beta-\delta = in\frac{k'^2\operatorname{sn}\omega}{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega},$$
$$\alpha-\delta = in\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega},\quad \gamma-\beta = in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega},$$
$$\gamma-\alpha = in\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega},\quad \gamma-\delta = in\frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega},$$

nous obtenons, par un calcul facile,

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)-(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)a''^2$$
$$= n^2[2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+k^2\operatorname{sn}^2\omega],$$
$$(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)-(\delta-\beta)(\alpha-\beta)-2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)b''^2$$
$$= n^2\left[2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+k^2\frac{\operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right],$$
$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)-(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)-2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)c''^2$$
$$= n^2\left[2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+\frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right].$$

Prenant donc pour variable indépendante u au lieu de t, on aura

$$D_u^2 a = [2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+k^2\operatorname{sn}^2\omega]a,$$
$$D_u^2 b = \left[2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+k^2\frac{\operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right]b,$$
$$D_u^2 c = \left[2k^2\operatorname{sn}^2u-1-k^2+\frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right]c;$$

et nous nous trouvons, par conséquent, amenés à trois des quatre formes canoniques de l'équation de Lamé, qui ont été considérées au § VI, p. 14. La solution générale de ces équations nous donne donc, en désignant les constantes arbitraires par P, Q, R, P', Q', R',

$$a = P\frac{H(u-\omega)e^{\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}}{\Theta(u)} + P'\frac{H(u+\omega)e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}}{\Theta(u)},$$
$$b = Q\frac{H_1(u-\omega)e^{\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}u}}{\Theta(u)} + Q'\frac{H_1(u+\omega)e^{-\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}u}}{\Theta(u)},$$
$$c = R\frac{\Theta(u-\omega)e^{\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}u}}{\Theta(u)} + R'\frac{\Theta(u+\omega)e^{-\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}u}}{\Theta(u)},$$

et l'on en conclut, si l'on écrit, pour plus de simplicité, P, Q, R, ... au lieu de $\mathrm{P}e^{i\alpha t_0}$, $\mathrm{Q}e^{i\beta t_0}$, $\mathrm{R}e^{i\gamma t_0}$, ...,

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{H}(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u} + \mathrm{P}'\,\frac{\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}\,\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}+\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u} + \mathrm{Q}'\,\frac{\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}-\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u},$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}\,\frac{\Theta(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}+\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u} + \mathrm{R}'\,\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}-\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u}.$$

La détermination des six constantes qui entrent dans ces expressions se fait très-facilement, comme on va le voir.

Je remarque, en premier lieu, que nous pouvons poser

$$\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n} + \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n} + \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} = i\lambda,$$

λ désignant la quantité déjà considérée au § XIV, p. 31. On a, en effet

$$\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \mathrm{D}_\omega \log \mathrm{dn}\,\omega = -\frac{k^2 \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega}{\mathrm{dn}\,\omega},$$

$$\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \mathrm{D}_\omega \log \mathrm{sn}\,\omega = \frac{\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{sn}\,\omega}.$$

et les égalités précédentes sont vérifiées au moyen des relations

$$\alpha - \beta = in\,\frac{k^2\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega}{\mathrm{dn}\,\omega}, \quad \gamma - \alpha = in\,\frac{\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{sn}\,\omega},$$

que nous avons données plus haut. Une conséquence importante découle de là : c'est qu'en changeant u en $u+4\mathrm{K}$, les fonctions $\frac{\mathrm{H}(u-\omega)e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}$, $\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)e^{\lambda i u}}{\Theta(u)}$, $\frac{\Theta(u-\omega)e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}$ se reproduisent multipliées par le même facteur $e^{4i\lambda\mathrm{K}}$, tandis que les quantités

$$\frac{\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}-\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u}, \quad \frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}-\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u}$$

sont affectées des facteurs $e^{4i\left(\frac{\alpha}{n}-\lambda\mathrm{K}\right)}$, $e^{4i\left(\frac{\beta}{n}-\lambda\mathrm{K}\right)}$, $e^{4i\left(\frac{\gamma}{n}-\lambda\mathrm{K}\right)}$, essentiellement inégaux. Or on a obtenu, pour les quotients $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, des fonctions doublement périodiques, ne changeant point quand on met $u+4\mathrm{K}$ au lieu de u; il faut donc que les facteurs qui multiplient A, B, C, lorsqu'on remplace u par $u + 4K$, soient les mêmes, ce qui exige qu'on fasse $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$. Ce point établi, j'écris, en modifiant convenablement la forme des constantes P, Q, R,

$$A = P \frac{\Theta(u - \omega) e^{i\lambda u}}{\Theta(u)} \operatorname{sn}(u - \omega),$$

$$B = Q \frac{\Theta(u - \omega) e^{i\lambda u}}{\Theta(u)} \operatorname{cn}(u - \omega),$$

$$C = R \frac{\Theta(u - \omega) e^{i\lambda u}}{\Theta(u)};$$

et j'emploie la condition $Aa'' + Bb'' + Cc'' = 0$, qui conduit à l'égalité

$$-P \operatorname{cn} u \operatorname{sn}(u - \omega) + Q \operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u - \omega) - iR \operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u = 0.$$

Or, en faisant $u = 0$ et $u = \omega$, on en déduit

$$P = Q = iR;$$

de sorte qu'on peut poser

$$P = \sqrt{k} N e^{i\nu}, \quad Q = \sqrt{k} N e^{i\nu}, \quad R = \frac{\sqrt{k} N e^{i\nu}}{i},$$

ce qui nous donne les expressions de A, B, C obtenues au § XIV, p. 31. Le calcul s'achève donc en déterminant, ainsi qu'on l'a fait plus haut, la valeur du facteur N.

XVI.

Les formules que nous venons d'établir ont été le sujet des travaux de plusieurs géomètres; M. Somoff en a donné une démonstration dans un Mémoire du *Journal de Crelle* (1), peu différente de celle de Jacobi, et qui repose aussi sur l'emploi des trois angles d'Euler. M. Brill, dans un excellent travail intitulé : *Sul problema della rotazione dei corpi* (*Annali di Matematica*, serie II, t. III, p. 33), a employé le premier les équations différentielles de Poisson et les quantités $a + ia'$, $b + ib'$, $c + ic'$ dont j'ai fait usage, mais son analyse est entièrement différente de la mienne. C'est à un autre point de vue que s'est placé M. Chelini (2) en déduisant pour la première

---

(1) *Démonstration des formules de M. Jacobi relatives à la théorie de la rotation d'un corps solide*, t. 42, p. 95.

(2) *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secundo i concetti del signor Poinsot* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, vol. X).

fois les conséquences analytiques de la belle théorie de Poinsot, que son auteur ni personne n'avait encore données d'une manière aussi approfondie. Je mentionnerai enfin deux récents Mémoires de M. Siacci, professeur à l'Université de Turin, et dont l'auteur a bien voulu, dans la lettre suivante, m'indiquer les points les plus essentiels :

« Turin, 24 décembre 1877.

» Poinsot, à la fin de son *Mémoire sur la rotation des corps,* démontre que la section diamétrale de l'ellipsoïde central, déterminée par le plan parallèle au couple d'impulsion, a son aire constante. Ce théorème a été le point de départ d'un Mémoire ([1]) dont les résultats se rattachent à la théorie des fonctions elliptiques aussi bien qu'à la théorie de la rotation. Je me suis d'abord proposé le problème de déterminer le mouvement des axes de cette section : pour abréger, je l'appellerai *section invariable,* et son plan, *plan invariable.* Une première solution du problème est suggérée par l'homothétie de la section invariable avec l'indicatrice de Dupin, relative à l'extrémité de l'axe instantané (pôle). La rotation d'un système de trois axes rectangulaires, dont les premiers coïncident avec les axes de la section, n'est que la résultante de deux rotations, l'une due au mouvement du pôle sur la poloïde, l'autre due au mouvement de l'ellipsoïde. Soient, sur ces axes, P_1, P_2, P_3 les composantes de la première vitesse angulaire; m_1, m_2, m_3 celles de la seconde. La résultante se composera de $P_1 + m_1$, $P_2 + m_2$, $P_3 + m_3$; et, comme le pôle reste sur un plan, on aura

$$(1) \qquad P_1 + m_1 = 0, \quad P_2 + m_2 = 0, \quad P_3 + m_3 = d\psi : dt,$$

ψ étant la longitude d'un des axes de la section. Soient $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ les demi-axes de l'ellipsoïde (le troisième est celui qui ne se couche jamais sur le plan invariable); x_1, x_2, x_3 les coordonnées du pôle; λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_3 = 0$, λ_1, λ_2 sont les demi-axes carrés de la section) les racines de l'équation $(\lambda) \equiv \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} - 1 = 0$. On aura

$$m_r^2 = \frac{(a_1 - \lambda_r)(a_2 - \lambda_r)(a_3 - \lambda_r)}{(\lambda_r - \lambda_s)(\lambda_r - \lambda_{s'})}, \quad 2P_r dt = \frac{m_s m_{s'}}{\lambda_s - \lambda_{s'}}\left(\frac{d\lambda_s}{m_s^2} + \frac{d\lambda_{s'}}{m_{s'}^2}\right)$$

(r, s, s' étant trois nombres de la série 1, 2, 3). Comme $\lambda_1 \lambda_2 = \text{const.} = c^2$, on a $m_3 = \text{const.}$ C'est, en effet, la distance du centre O au plan fixe de contact;

([1]) *Memorie della Società italiana delle Scienze,* serie III, t. III.

de même m_1, m_2 sont les distances de O des plans tangents aux surfaces (γ_1) et (λ_2). Au moyen de ces valeurs, les équations (1), qui reviennent en substance aux équations d'Euler, donnent t et ψ en fonction de $x = \lambda_1 + \lambda_2$. En posant $t = nu$ (n expression connue), on obtient

$$(2) \qquad \psi = \mp \frac{u}{2}\left(\frac{d \log \operatorname{sn} i\sigma}{d\sigma} + \frac{d \log \operatorname{sn} i\tau}{d\tau}\right) \pm \frac{1}{2i}[\Pi(u, i\sigma) + \Pi(u, i\tau)],$$

$$(3) \qquad \psi = \mp \frac{u}{2}\left[\frac{d \log \mathrm{H}(i\sigma)}{d\sigma} + \frac{d \log \mathrm{H}(i\tau)}{d\tau}\right] \pm \frac{1}{4i} \log \frac{\Theta(u - i\sigma)\Theta(u - i\tau)}{\Theta(u + i\sigma)\Theta(u + i\tau)},$$

et l'on prendra le signe supérieur ou inférieur, suivant que $m_3^2 >$ ou $< a_2$.

Le module est $k = \sqrt{\dfrac{a_3(a_2 - a_1)(c^2 - a_1 a_2)}{a_1(a_2 - a_3)(c^2 - a_2 a_3)}}$, et σ et τ sont ainsi donnés :

$$\tau = \int_0^{\mathrm{F}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}, \quad \sigma = \int_0^{\mathrm{G}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}, \quad \cos\begin{pmatrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{G}\end{pmatrix} = \frac{c \pm a_3}{a_3 \pm c}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}},$$

F étant un angle aigu négatif ou positif, suivant que $m_3^2 \gtrless a_2$ et G un angle positif, qui sera $<$ ou $>$ $\frac{1}{2}\pi$, suivant que la zone entourée par la poloïde comprendra deux ombilics ou aucun : c'est, en effet, ce qui revient aux cas de $\mathrm{G} \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ ou de $\sigma \lesseqgtr \mathrm{K}'$. La double expression

$$c \frac{\mathrm{H}(i\sigma)\sqrt{\Theta(u + i\tau)\Theta(u - i\tau)} \pm \mathrm{H}(i\tau)\sqrt{\Theta(u + i\sigma)\Theta(u - i\sigma)}}{\mathrm{H}(i\sigma)\sqrt{\Theta(u + i\tau)\Theta(u - i\tau)} \mp \mathrm{H}(i\tau)\sqrt{\Theta(u + i\sigma)\Theta(u - i\sigma)}}$$

donne λ_1 et λ_2. L'étude de l'expression (3) démontre que le mouvement moyen des demi-axes de la section est donné par le terme multiplié par u, et l'inégalité par l'autre, lorsque $\sigma < \mathrm{K}'$; lorsque $\sigma > \mathrm{K}'$, le mouvement moyen et l'inégalité sont donnés par les mêmes termes en y changeant σ en $\sigma - 2\mathrm{K}'$; et l'on trouve que, dans le second cas, le mouvement moyen coïncide avec celui des projections des demi-axes $\sqrt{a_1}$ et $\sqrt{a_2}$, et dans le premier avec celui des projections de $\sqrt{a_3}$ et de l'axe instantané.

On peut tirer ψ de l'expression de la longitude (μ) d'une droite quelconque OR, dont l'extrémité a ξ_1, ξ_2, ξ_3 pour coordonnées. Je trouve ainsi

$$\psi + \operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{m_2 x_1 \xi_1}{a_1 - \lambda_2} + \frac{m_2 x_2 \xi_2}{a_2 - \lambda_2} + \frac{m_2 x_3 \xi_3}{a_3 - \lambda_2}\right) : \left(\frac{m_1 x_1 \xi_1}{a_1 - \lambda_1} + \frac{m_1 x_2 \xi_2}{a_2 - \lambda_1} + \frac{m_1 x_3 \xi_3}{a_3 - \lambda_1}\right)\right] = (\mu),$$

et je donne aussi l'expression développée de (μ). Comme ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont fonctions arbitraires de u, on voit l'infinité de formes qu'on peut donner à l'expression (2) de ψ.

En faisant coïncider OR avec $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ et avec l'axe instantané, on obtient leurs longitudes μ_1, μ_2, μ_3, μ et l'on a

$$(4) \qquad \psi = \mu_r - \text{arc tang}\,\frac{m_2}{m_1}\,\frac{a_r - \lambda_1}{a_r - \lambda_2} = \mu - \text{arc tang}\,\frac{m_2}{m_1}.$$

Ces quatre expressions de ψ contiennent les principaux théorèmes sur la transformation et sur l'addition des paramètres des intégrales elliptiques de troisième espèce, mais sous une forme nouvelle, à cause des termes circulaires.

Le mouvement des projections des axes du corps et de l'axe instantané a été déterminé par Jacobi : leurs inégalités sont données au moyen d'une constante a, qui se trouve liée avec nos quantités par l'équation $\sigma + \tau = 2a$; mais aux expressions des mouvements moyens concourent les moments d'inertie du corps. Au moyen des quantités σ et τ, elles acquièrent, comme on a vu, une forme plus homogène. Si nous posons $\sigma - \tau = 2b$, les constantes du problème a_1, a_2, a_3, m_3 se transforment en a, b, c, k. Ainsi l'on a

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\operatorname{sn} ia \operatorname{dn} ia \operatorname{cn} ib}{\operatorname{sn} ib \operatorname{dn} ib \operatorname{cn} ia}, \quad \frac{a_2}{c} = \frac{\operatorname{sn} ia \operatorname{cn} ib \operatorname{dn} ib}{\operatorname{sn} ib \operatorname{cn} ia \operatorname{dn} ia}, \quad \frac{a_3}{c} = \frac{\operatorname{sn} ib \operatorname{cn} ib \operatorname{dn} ia}{\operatorname{sn} ia \operatorname{cn} ia \operatorname{dn} ib},$$

$$\frac{x_1^2}{a_1} = \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 ib}, \qquad \frac{x_2^2}{a_2} = \frac{\operatorname{dn}^2 ib}{\operatorname{cn}^2 ib}\operatorname{sn}^2 u, \qquad \frac{x_3^2}{a_3} = -\frac{\operatorname{sn}^2 ib}{\operatorname{cn}^2 ib}\operatorname{dn}^2 u;$$

en changeant $x_r^2 : a_r$ en $m_3^2 x_r^2 : a_r^2$, on change b en a.

J'ajouterai aux résultats de mon Mémoire les cosinus de direction des axes de la section invariable par rapport à l'axe instantané et aux axes du corps; ils sont :

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \mp \frac{\mathrm{Y} \operatorname{dn}(u + ia) - \mathrm{X} \operatorname{dn}(u - ia)}{2i\sqrt{\mathrm{XY}} \operatorname{dn}(u + ia) \operatorname{dn}(u - ia)},$$

$$\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = -\frac{\mathrm{Y} \operatorname{dn}(u + ia) + \mathrm{X} \operatorname{dn}(u - ia)}{2\sqrt{\mathrm{XY}} \operatorname{dn}(u + ia) \operatorname{dn}(u - ia)},$$

$$\frac{m_1 x_1}{a_1 - \lambda} = -\frac{\mathrm{Y} \operatorname{sn}(u + ia) + \mathrm{X} \operatorname{sn}(u - ia)}{2 \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}}, \qquad \frac{m_2 x_1}{a_1 - \lambda_2} = \mp \frac{\mathrm{Y} \operatorname{sn}(u + ia) - \mathrm{X} \operatorname{sn}(u - ia)}{2i \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}},$$

$$\frac{m_1 x_2}{a_2 - \lambda_1} = -\frac{\mathrm{Y} \operatorname{cn}(u + ia) + \mathrm{X} \operatorname{cn}(u - ia)}{2 \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}}, \qquad \frac{m_2 x_2}{a_2 - \lambda_2} = \mp \frac{\mathrm{Y} \operatorname{cn}(u + ia) - \mathrm{X} \operatorname{cn}(u - ia)}{2i \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}},$$

$$\frac{m_1 x_3}{a_3 - \lambda_1} = \mp \frac{\mathrm{Y} - \mathrm{X}}{2i \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}}, \qquad \frac{m_2 x_3}{a_3 - \lambda_2} = -\frac{\mathrm{Y} + \mathrm{X}}{2 \operatorname{cn} ia \sqrt{\mathrm{XYZ}}},$$

où

$$X^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 ib \operatorname{sn}^2(u + ia), \quad Y^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 ib \operatorname{sn}^2(u - ia),$$

$$Z(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 ia \operatorname{sn}^2 u) = 1,$$

$$\frac{n}{\sqrt{c}} = \pm \frac{2 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 i\tau - \operatorname{sn}^2 i\sigma}}.$$

Les doubles signes se rapportent aux cas de $m_3^2 \gtrless a_2$, avec la convention que, suivant que $a + b >$ ou $< K'$, X, Y, ou bien $X \operatorname{sn}(u - ia)$, $Y \operatorname{sn}(u + ia)$ imaginaires conjugués, aient leur partie réelle positive. On tire ces expressions de (4). La substitution directe des valeurs x_1, x_2, x_3 ; m_1', m_2; λ_1, λ_2 donne des expressions assez simples, mais tout à fait différentes, et leur comparaison donne lieu à des formules remarquables.≪

Les résultats dont on vient de voir l'indication succincte sont les premiers qui aient été ajoutés aux travaux de Jacobi dans la théorie de la rotation; mais je dois signaler encore, en raison de l'intérêt que j'y attache, un point non mentionné dans le résumé précédent. Remplaçons, dans le plan invariable, les axes fixes Ox, Oy par deux autres également rectangulaires, mais mobiles, Ox_1, Oy_1, dont le premier soit constamment parallèle à la direction du rayon vecteur de l'erpoloïde; M. Chelini a introduit, en suivant la méthode de Poinsot, les angles des axes d'inertie avec les droites Ox_1, Oy_1, Oz, et donné ce système de formules, où ι désigne le rayon vecteur de l'erpoloïde :

$$\cos(x_1 x') = \frac{(\alpha - \delta) a''}{\iota}, \quad \cos(y_1 x') = \frac{(\gamma - \beta) b'' c''}{\iota}, \quad \cos(z_1 x') = a'',$$

$$\cos(x_1 y') = \frac{(\beta - \delta) b''}{\iota}, \quad \cos(y_1 y') = \frac{(\alpha - \gamma) c'' a''}{\iota}, \quad \cos(z_1 y') = b'',$$

$$\cos(x_1 z') = \frac{(\gamma - \delta) c''}{\iota}, \quad \cos(y_1 z') = \frac{(\beta - \alpha) a'' b''}{\iota}, \quad \cos(z_1 z') = c''.$$

C'est le passage des neuf cosinus de M. Chelini à ceux de Jacobi, qu'il était important d'effectuer pour compléter la déduction analytique de la théorie de Poinsot, alors même que, par cette voie, on ne dût peut-être pas y arriver de la manière la plus rapide. Je renverrai, sur ce point essentiel, aux beaux Mémoires de M. Siacci, en me bornant à remarquer les relations suivantes, dans lesquelles $V_1 = v - iv'$:

$$\cos(x_1 x') + i \cos(y_1 x') = \frac{1}{\iota} A V_1,$$

$$\cos(x_1 y') + i \cos(y_1 y') = \frac{1}{\iota} B V_1,$$

$$\cos(x_1 z') + i \cos(y_1 z') = \frac{1}{\iota} C V_1,$$

et j'y ajouterai quelques formules relatives à l'erpoloïde.

XVII.

Si l'on met, au lieu de ξ, η, ζ, dans les équations du § X, p. 23, les quantités suivantes :

$$\xi = p\rho, \quad \eta = q\rho, \quad \zeta = r\rho,$$

où p, q, r sont les composantes de la vitesse et ρ une indéterminée, on aura, pour déterminer la position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes fixes, les formules

$$\begin{aligned} x &= (ap + bq + cr)\rho = v\rho, \\ y &= (a'p + b'q + c'r)\rho = v'\rho, \\ z &= (a''p + b''q + c''r)\rho = v''\rho, \end{aligned}$$

dont la dernière est simplement $z = \delta\rho$. Or, l'erpoloïde étant la trace de cet axe mobile sur le plan tangent à l'ellipsoïde central, $z = \delta$, on voit qu'il suffit de faire $\rho = 1$ pour obtenir les coordonnées de cette courbe, exprimées en fonction du temps, ou de la variable u. Nous avons ainsi $x = v$, $y = v'$; mais ce sont plutôt les quantités $x + iy$ et $x - iy$ qu'il convient de considérer, et je poserai en conséquence

$$\begin{aligned} x + iy &= -in\frac{H'(0)\Theta_1(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\Theta(u)} = \Phi(u), \\ x - iy &= +in\frac{H'(0)\Theta_1(u+\omega)e^{-i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\Theta(u)} = \Phi_1(u), \end{aligned}$$

ce qui permettra d'employer les conditions caractéristiques

$$\begin{aligned} \Phi(u + 2K) &= \mu\Phi(u), & \Phi(u + 2iK') &= -\mu'\Phi(u), \\ \Phi_1(u + 2K) &= \frac{1}{\mu}\Phi_1(u), & \Phi_1(u + 2iK') &= -\frac{1}{\mu'}\Phi_1(u), \end{aligned}$$

où j'ai fait

$$\mu = e^{2i\lambda K}, \quad \mu' = e^{\frac{i\pi\omega}{K} - 2\lambda K'}.$$

Elles montrent, en effet, que les produits $\Phi(u)\Phi_1(u)$, $D_u\Phi(u)D_u\Phi_1(u)$, et en général $D_u^m\Phi(u)D_u^n\Phi_1(u)$, quels que soient m et n, sont des fonctions doublement périodiques, ayant $2K$ et $2iK'$ pour périodes. En particulier, nous envisagerons l'expression $D_u\Phi(u)D_u\Phi_1(u) = x'^2 + y'^2$, puis les coefficients de i dans les suivantes :

$$D_u\Phi(u)\Phi_1(u) \quad = xx' + yy' + i(xy' - yx'),$$
$$D_u^2\Phi(u)D_u\Phi_1(u) = x'x'' + y'y'' + i(x'y'' - y'x''),$$

ces fonctions doublement périodiques donnant, par les formules connues, les éléments de l'arc, du secteur et le rayon de courbure. J'emploierai, pour les obtenir, la formule de décomposition en éléments simples, rappelée au commencement de ce travail (§ I, p. 5), et dont l'application sera facile, $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ ayant pour pôle unique $u = iK'$. N'ayant ainsi à considérer qu'un seul élément simple, $\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$, il suffit d'avoir les développements suivant les puissances croissantes de ε de $\Phi(iK' + \varepsilon)$ et $\Phi_1(iK' + \varepsilon)$; ils s'obtiennent comme on va voir.

Je remarque d'abord que, au moyen de la fonction $\varphi_1(x, \omega)$, définie au § III, p. 8, on peut écrire

$$\Phi(u) = C\varphi_1(u, -\omega)e^{\frac{i\delta u}{n}}, \quad \Phi_1(u) = C_1\varphi_1(x, \omega)e^{-\frac{i\delta u}{n}},$$

C et C_1 désignant des constantes. C'est ce que l'on voit en joignant aux relations précédemment employées,

$$i\lambda = \frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n} + \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n} + \frac{H'(\omega)}{H(\omega)},$$

la suivante :

$$i\lambda = \frac{i\delta}{n} + \frac{H'_1(\omega)}{H_1(\omega)},$$

qui résulte de la condition $\alpha - \delta = in\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}$ (§ XV, p. 36), en la mettant sous la forme

$$\frac{i\alpha}{n} - \frac{i\delta}{n} = D_\omega \log\operatorname{cn}\omega = \frac{H'_1(\omega)}{H_1(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Cela posé, l'équation $i\varphi_1(u, \omega) = \chi(u, \omega + K + iK')$ montre qu'on a le développement de $\varphi_1(iK' + \varepsilon, \omega)$ en changeant simplement ω en $\omega + K + iK'$ dans la formule de la page 13 :

$$\chi(iK' + \varepsilon, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 + \cdots,$$

et il vient ainsi, en nous bornant aux seuls termes nécessaires,

$$i\varphi_1(iK' + \varepsilon, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega} + \frac{2k^2 - 1}{3}\right)\frac{\varepsilon}{2} - \frac{k'^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}\,\frac{\varepsilon^2}{3} - \cdots.$$

Désignons par S_1, pour abréger, la série du second membre, et par S ce qu'elle devient lorsqu'on change i en $-i$, c'est-à-dire ω en $-\omega$; puisqu'on a $\omega = iv$, on aura les expressions

$$\Phi(iK'+\varepsilon) = RSe^{\frac{i\delta\varepsilon}{n}}, \quad \Phi_1(iK'+\varepsilon) = R_1 S_1 e^{-\frac{i\delta\varepsilon}{n}},$$

où R et R_1 sont deux nouvelles constantes, dont la signification se montre d'elle-même. Il est clair, en effet, que ces quantités sont les résidus des fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ pour $u = iK'$, de sorte qu'on trouve immédiatement les valeurs

$$R = -ne^{\frac{i\pi\omega}{2K} - \lambda K' + i\nu}, \quad R_1 = +ne^{-\frac{i\pi\omega}{2K} + \lambda K' - i\nu}$$

et par suite la relation $RR_1 = -n^2$. Voici maintenant les applications de nos formules.

XVIII.

Je pars des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon\Phi(iK'+\varepsilon)D_\varepsilon\Phi_1(iK'+\varepsilon) &= -n^2\left(S'+\frac{i\delta}{n}S\right)\left(S'_1-\frac{i\delta}{n}S_1\right),\\
D_\varepsilon\Phi(iK'+\varepsilon)\Phi_1(iK'+\varepsilon) &= -n^2\left(S'+\frac{i\delta}{n}S\right)S_1,\\
D_\varepsilon^2\Phi(iK'+\varepsilon)D_\varepsilon\Phi_1(iK'+\varepsilon) &= -n^2\left(S''+\frac{2i\delta}{n}S'-\frac{\delta^2}{n^2}S\right)\left(S'_1-\frac{i\delta}{n}S_1\right),
\end{aligned}$$

et je me borne à la partie principale des développements en faisant, dans les deux dernières, abstraction des termes réels; le calcul donne pour résultats

$$\frac{P}{\varepsilon^2}-\frac{n^2}{\varepsilon^4}, \quad -\frac{n\delta}{\varepsilon^2}, \quad -\frac{Q}{n\varepsilon^2},$$

si l'on écrit, pour abréger,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{n^2k'^2}{\text{cn}^2\omega}+\frac{n^2(2k^2-1)}{3}+\delta^2,\\
Q &= \frac{2n^3k'^2\,\text{sn}\,\omega\,\text{dn}\,\omega}{i\,\text{cn}^3\omega}+\frac{3\delta n^2k'^2}{\text{cn}^2\omega}+\delta n^2(2k^2-1)+\delta^3.
\end{aligned}$$

Remplaçant donc $\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $\frac{1}{\varepsilon^4}$ par $-D_\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}$, $-\frac{1}{6}D_\varepsilon^3\frac{1}{\varepsilon}$, on obtiendra, en désignant par C, C′, C″ des constantes,

$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{C} - \mathrm{P}\,\mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{1}{6} n^2 \mathrm{D}_u^3 \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$$xy' - yx' = \mathrm{C}' + n\delta \mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$$x'y'' - y'x'' = \mathrm{C}'' + \frac{\mathrm{Q}}{n} \mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Employons enfin la relation $\mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2 u$, et nous parviendrons, en modifiant convenablement les constantes, aux expressions suivantes :

$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{C} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u,$$

$$xy' - yx' = \mathrm{C}' - \delta n k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

$$x'y'' - y'x'' = \mathrm{C}'' - \frac{\mathrm{Q}}{n} k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Pour déterminer C, C′, C″, je supposerai $u = 0$; il suffira ainsi de connaître les valeurs des fonctions $\Phi(u)$, $\Phi_1(u)$ et de leurs premières dérivées quand on pose $u = 0$; or on obtient, par un calcul facile dont je me borne à donner le résultat,

$$e^{-iv}\Phi(u) = -in \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} + \beta \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} u + i \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega} \frac{u^2}{2} + \ldots,$$

$$e^{+iv}\Phi_1(u) = +in \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} + \beta \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} u - i \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega} \frac{u^2}{2} + \ldots;$$

on en conclut

$$\mathrm{C} = \beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}, \quad \mathrm{C}' = n\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}, \quad \mathrm{C}'' = \beta \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}^2\omega}.$$

Soit donc S l'aire d'un secteur, s la longueur de l'arc et R le rayon de courbure de l'erpoloïde, nous aurons

$$\mathrm{D}_u \mathrm{S} = n\left(\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} - \delta k^2 \operatorname{sn}^2 u\right),$$

$$(\mathrm{D}_u s)^2 = \beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u,$$

$$\mathrm{R} = \frac{n \operatorname{cn}^2\omega \left[\beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u\right]^{\frac{3}{2}}}{\beta\,(n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega) - \mathrm{Q} k^2 \operatorname{cn}^2\omega \operatorname{sn}^2 u}.$$

Ces formules donnent lieu à quelques remarques.

J'observerai, en premier lieu, qu'on tire de la première, en comptant l'aire à partir de $t = t_0$ ou $u = 0$,

$$S = n\beta \frac{\mathrm{dn}^2\omega}{\mathrm{cn}^2\omega} u - n\delta \left[\frac{J}{K} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right]$$
$$= nu \left(\beta \frac{\mathrm{dn}^2\omega}{\mathrm{cn}^2\omega} - \delta \frac{J}{K}\right) + n\delta \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

il en résulte que, u devenant $u + 2K$, le secteur s'accroît de la quantité constante

$$2n\left(\beta \frac{\mathrm{dn}^2\omega}{\mathrm{cn}^2\omega} K - \delta J\right),$$

ou, sous une autre forme,

$$2\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \beta}}[(\gamma - \delta)\beta K - (\gamma - \beta)\delta J].$$

Je démontrerai ensuite que le trinôme en $\mathrm{sn}\,u$ qui se présente dans l'élément de l'arc, et dont les racines sont réelles et de signes contraires, a sa racine positive comprise entre 1 et $\frac{1}{k}$. En faisant, en effet, $\mathrm{sn}\,u = 1$, puis $\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{k}$, nous trouvons pour résultats les quantités

$$\frac{\alpha^2(\gamma - \delta)(\delta - \beta)}{(\gamma - \beta)(\delta - \alpha)}, \quad \frac{\gamma^2(\beta - \delta)}{\gamma - \beta},$$

dont la première est positive et la seconde négative. On verra sans peine aussi qu'en introduisant $\mathrm{dn}\,u$ au lieu de $\mathrm{sn}\,u$, il prend la forme suivante, qui est assez simple :

$$\frac{\gamma^2(\beta - \delta)}{\gamma - \beta} - [\gamma(\alpha + \beta - 2\delta) - \alpha\beta]\,\mathrm{dn}^2 u - (\gamma - \beta)(\delta - \alpha)\,\mathrm{dn}^4 u.$$

Enfin, et en dernier lieu, je remarquerai que les constantes qui entrent dans le dénominateur du rayon de courbure peuvent s'écrire ainsi :

$$Q = -4\delta^3 + 4(\alpha + \beta + \gamma)\delta^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\delta + 2\alpha\beta\gamma;$$
$$\frac{\beta(n^2 k^2 \mathrm{cn}^2\omega + \beta^2 \mathrm{dn}^2\omega)}{\mathrm{cn}^2\omega} = \frac{\beta(\gamma - \delta)(\beta\alpha + \beta\gamma - \alpha\gamma)}{\gamma - \beta};$$

mais, malgré cette simplification, il paraît difficile de déduire de la formule qui détermine les points stationnaires,

$$k^2 \mathrm{sn}^2 u = \frac{\beta(n^2 k^2 \mathrm{cn}^2\omega + \beta^2 \mathrm{dn}^2\omega)}{Q\,\mathrm{cn}^2\omega},$$

les conditions sous lesquelles ces points seront réels ou imaginaires, et je ne m'y arrêterai pas.

XIX.

Après l'erpoloïde, je considère encore la courbe sphérique décrite par un point déterminé du corps pendant la rotation, et dont les équations sont

$$
\begin{aligned}
x &= a\xi + b\eta + c\zeta,\\
y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta,\\
z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta.
\end{aligned}
$$

Je remarquerai tout d'abord que les éléments géométriques, qui conservent la même valeur quand on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre quelconque, seront des fonctions doublement périodiques du temps. Si l'on pose, en effet,

$$
\begin{aligned}
D_t^n x &= a\xi_n + b\eta_n + c\zeta_n,\\
D_t^n y &= a'\xi_n + b'\eta_n + c'\zeta_n,\\
D_t^n z &= a''\xi_n + b''\eta_n + c''\zeta_n,
\end{aligned}
$$

les équations de Poisson donnent facilement

$$
\begin{aligned}
\xi_{n+1} &= D_t\xi_n + q\zeta_n - r\eta_n,\\
\eta_{n+1} &= D_t\eta_n + r\xi_n - p\zeta_n,\\
\zeta_{n+1} &= D_t\zeta_n + p\eta_n - q\xi_n,
\end{aligned}
$$

et ces relations permettent d'exprimer de proche en proche, pour toute valeur de n, les quantités ξ_n, η_n, ζ_n par des fonctions rationnelles et entières de a'', b'', c''. On trouvera, en particulier,

$$\xi_1 = b''\beta\zeta - c''\gamma\eta, \quad \eta_1 = c''\gamma\xi - a''\alpha\zeta, \quad \zeta_1 = a''\alpha\eta - b''\beta\xi,$$

et, par conséquent, en désignant par s l'arc de la courbe, nous aurons la formule

$$(D_t s)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2.$$

On obtient ensuite, pour le rayon de courbure R et le rayon de torsion R_1, les expressions suivantes :

$$R^2 = \frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^3}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad R_1 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\Delta},$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$u = \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2, \quad v = \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1, \quad w = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

C'est à l'élément de l'arc que je m'arrêterai un moment, afin de tirer quelques conséquences de la forme analytique remarquable que présente la quantité $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$. Nous avons, en effet, la relation

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0,$$

qui donne facilement

$$(\xi^2 + \zeta^2)(D_t s)^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\eta_1^2 + (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1)^2,$$

et, par suite, cette décomposition en facteurs imaginaires conjugués, où j'écris, pour abréger, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$,

$$(\xi^2 + \zeta^2)(D_t s)^2 = (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 + i\rho\eta_1)(\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 - i\rho\eta_1).$$

Or les valeurs de a'', b'', c'', à savoir :

$$a'' = -\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}}\,\mathrm{cn}\,u, \quad b'' = \sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}\,\mathrm{sn}\,u, \quad c'' = \sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\,\mathrm{dn}\,u,$$

conduisent à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 + i\rho\eta_1 = \alpha & \sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}}(\xi\eta + i\rho\zeta)\,\mathrm{cn}\,u \\ & + \beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}(\xi^2 + \zeta^2)\,\mathrm{sn}\,u \\ & - \gamma\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}(\eta\zeta - i\rho\xi)\,\mathrm{dn}\,u, \end{aligned}$$

et nous allons facilement en déduire les valeurs particulières des coordonnées ξ, η, ζ, pour lesquelles l'arc de la courbe sphérique, au lieu de dépendre d'une transcendante compliquée, s'obtient sous forme finie explicite. Je me fonderai, à cet effet, sur cette remarque, que le produit de deux fonctions linéaires

$$\Pi(u) = (\mathrm{A}\,\mathrm{cn}\,u + \mathrm{B}\,\mathrm{sn}\,u + \mathrm{C}\,\mathrm{dn}\,u)(\mathrm{A}'\,\mathrm{cn}\,u + \mathrm{B}'\,\mathrm{sn}\,u + \mathrm{C}'\,\mathrm{dn}\,u)$$

devient le carré d'une fonction uniforme si l'on a

$$\mathrm{A}^2k'^2 + \mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2k'^2 = 0, \quad \mathrm{A}'^2k'^2 + \mathrm{B}'^2 - \mathrm{C}'^2k'^2 = 0.$$

A cet effet, j'observe que les formules

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2 k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & \mathrm{A} \operatorname{cn} 2u + \mathrm{B} \operatorname{sn} 2u + \mathrm{C} \operatorname{dn} 2u \\ & = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{C} - 2(\mathrm{A} + \mathrm{C}k^2) \operatorname{sn}^2 u + (\mathrm{A} + \mathrm{C}) k^2 \operatorname{sn}^4 u + 2\mathrm{B} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \end{aligned}$$

Cela étant, soit, en désignant par g et h deux constantes,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} + \mathrm{C} - 2(\mathrm{A} + \mathrm{C}k^2) \operatorname{sn}^2 u + (\mathrm{A} + \mathrm{C}) k^2 \operatorname{sn}^4 u & \\ + 2\mathrm{B} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u & = (g \operatorname{sn} u + h \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2, \end{aligned}$$

on verra que les quatre équations résultant de l'identification se réduisent aux trois suivantes :

$$\mathrm{A} + \mathrm{C} = h^2, \quad 2(\mathrm{A} + \mathrm{C}k^2) = h^2(1 + k^2) - g^2, \quad \mathrm{B} = gh;$$

or l'élimination de g et h conduit immédiatement à la condition

$$\mathrm{A} k'^2 + \mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2 k'^2 = 0.$$

Soit de même ensuite

$$\mathrm{A}' \operatorname{cn} 2u + \mathrm{B}' \operatorname{sn} 2u + \mathrm{C}' \operatorname{dn} 2u = \frac{(g' \operatorname{sn} u + h' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

sous la condition semblable

$$\mathrm{A}' k'^2 + \mathrm{B}'^2 - \mathrm{C}'^2 k'^2 = 0;$$

nous en conclurons, pour $\sqrt{\Pi(2u)}$, l'expression suivante :

$$\sqrt{\Pi(2u)} = \frac{(g \operatorname{sn} u + h \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)(g' \operatorname{sn} u + h' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

ou, en développant,

$$\sqrt{\Pi(2u)} = \frac{gg' \operatorname{sn}^2 u + hh'[1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u] + (gh' + hg') \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u};$$

on en déduit ensuite facilement, si l'on change u en $\frac{u}{2}$,

$$2\sqrt{\Pi(u)} = \frac{1}{k'^2} gg'(\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u) + (gh' + hg') \operatorname{sn} u + hh'(\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u).$$

Voici maintenant l'application de la remarque que nous venons d'établir.

XX.

Revenant à l'expression précédemment donnée des facteurs de $(D_t s)^2$, je pose

$$A = \alpha\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\cancel{\beta}}}(\xi\eta + i\rho\zeta), \quad B = \beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}(\xi^2+\zeta^2), \quad C = -\gamma\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}(\eta\zeta \cancel{+} i\rho\xi),$$

$$A' = \alpha\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\cancel{\beta}}}(\xi\eta - i\rho\zeta), \quad B' = \beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}}(\xi^2+\zeta^2), \quad C' = -\gamma\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}}(\eta\zeta + i\rho\xi),$$

et j'observe que, au moyen de la valeur $k'^2 = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}$, nos conditions se présentent sous la forme suivante :

$$\frac{\alpha^2}{\alpha-\delta}(\xi\eta + i\rho\zeta)^2 + \frac{\beta^2}{\beta-\delta}(\xi^2+\zeta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma-\delta}(\eta\zeta - i\rho\xi)^2 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha-\delta}(\xi\eta - i\rho\zeta)^2 + \frac{\beta^2}{\beta-\delta}(\xi^2+\zeta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma-\delta}(\eta\zeta + i\rho\xi)^2 = 0.$$

Elles donnent immédiatement $\xi\eta\zeta = 0$; et nous poserons en conséquence :

1° $\quad \xi = 0, \quad \left(\frac{\gamma^2}{\gamma-\delta} - \frac{\alpha^2}{\alpha-\delta}\right)\eta^2 + \left(\frac{\beta^2}{\beta-\delta} - \frac{\alpha^2}{\alpha-\delta}\right)\zeta^2 = 0,$

2° $\quad \eta = 0, \quad \left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\delta} - \frac{\beta^2}{\beta-\delta}\right)\zeta^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma-\delta} - \frac{\beta^2}{\beta-\delta}\right)\xi^2 = 0,$

3° $\quad \zeta = 0, \quad \left(\frac{\beta^2}{\beta-\delta} - \frac{\gamma^2}{\gamma-\delta}\right)\xi^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\delta} - \frac{\gamma^2}{\gamma-\delta}\right)\eta^2 = 0.$

» Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned} a &= (\alpha-\delta)(\gamma-\beta)(\gamma\delta+\beta\delta-\gamma\beta), \\ b &= (\beta-\delta)(\alpha-\gamma)(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma), \\ c &= (\gamma-\delta)(\beta-\alpha)(\beta\delta+\alpha\delta-\beta\alpha) : \end{aligned}$$

au moyen de ces quantités, qu'on verra facilement vérifier les relations

$$a+b+c=0, \quad \frac{a\alpha^2}{\alpha-\delta} + \frac{b\beta^2}{\beta-\delta} + \frac{c\gamma^2}{\gamma-\delta} = 0,$$

nous obtenons les trois systèmes de valeurs

1° $\quad \xi = 0, \quad \eta^2 = c, \quad \zeta^2 = b,$

2° $\quad \eta = 0, \quad \zeta^2 = a, \quad \xi^2 = c,$

3° $\quad \zeta = 0, \quad \xi^2 = b, \quad \eta^2 = a.$

Maintenant je vais démontrer que, de ces diverses solutions, la première est seule réelle et répond à la question proposée.

Pour cela, je rappelle que les constantes α, β, γ, δ satisfont aux conditions

(I) $$\alpha < \beta < \delta < \gamma,$$

ou à celles-ci

(II) $$\alpha > \beta > \delta > \gamma,$$

et j'observe qu'on aura, dans les deux cas,

$$(\alpha - \delta)(\gamma - \beta) < 0, \quad (\beta - \delta)(\alpha - \gamma) > 0, \quad (\gamma - \delta)(\beta - \alpha) > 0.$$

J'ajoute à ces résultats les suivants :

$$\gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta > 0, \quad \alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\gamma > 0, \quad \beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha > 0,$$

qui donneront, comme on voit,

$$\mathrm{a} < 0, \quad \mathrm{b} > 0, \quad \mathrm{c} > 0.$$

On peut écrire, en effet,

$$\begin{aligned} \gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta &= \beta\delta + (\delta - \beta)\gamma, \\ \alpha\delta + \gamma\delta - \gamma\alpha &= \alpha\delta + (\delta - \alpha)\gamma, \\ \beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha &= \alpha\delta + (\delta - \alpha)\beta, \end{aligned}$$

et, dans le premier système de conditions, on voit ainsi que les premiers membres sont tous positifs. Nous ferons ensuite, en passant au second système,

$$\begin{aligned} \gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta &= \gamma\delta + (\delta - \gamma)\beta, \\ \alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\gamma &= \gamma\delta + (\delta - \gamma)\alpha; \end{aligned}$$

mais ces transformations faciles ne suffisent plus, à l'égard de la troisième quantité $\beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha$, pour reconnaître qu'elle est toujours positive comme les autres. Il est nécessaire, en effet, d'introduire une condition nouvelle, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\gamma}$, ayant son origine dans la définition des quantités $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, qui sont proportionnelles aux moments principaux d'inertie. Nous écrirons, dans ce cas,

$$\beta\delta + \alpha\delta - \alpha\beta = \frac{1}{\alpha\beta\delta}\left[\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}\right)\right],$$

et le dernier résultat qui nous restait à établir se trouve démontré. Les valeurs réelles ainsi obtenues pour les coordonnées ξ, η, ζ, à savoir $\xi = 0$, $\eta = \sqrt{\mathrm{b}}$,

$\zeta = \sqrt{c}$, donnent, en prenant les radicaux avec le double signe, quatre points qui décrivent des courbes rectifiables, ou plutôt deux droites remarquables : $\xi = 0$, $\eta = \pm\sqrt{\frac{b}{c}}\zeta$, dont tous les points décrivent pendant la rotation du corps de telles courbes. Pour former l'expression de l'arc s, observons que, d'après l'égalité $a + b + c = 0$, on peut écrire $i\rho = \sqrt{a}$, ce qui donne les valeurs suivantes :

$$A = \zeta\alpha\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}a}, \quad B = \zeta\beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\beta}b}, \quad C = \zeta\gamma\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}c}.$$

On a ensuite

$$A' = -A, \quad B' = B, \quad C' = C,$$

et nous en concluons

$$\begin{aligned}&(A\,\mathrm{cn}\,u + B\,\mathrm{sn}\,u + C\,\mathrm{dn}\,u)(A'\,\mathrm{cn}\,u + B'\,\mathrm{sn}\,u + C'\,\mathrm{dn}\,u)\\&\quad = (B\,\mathrm{sn}\,u + C\,\mathrm{dn}\,u)^2 - A^2\,\mathrm{cn}^2 u.\end{aligned}$$

La condition $A^2k'^2 + B^2 - C^2k'^2 = 0$ conduit enfin à cette nouvelle transformation

$$\begin{aligned}(B\,\mathrm{sn}\,u + C\,\mathrm{dn}\,u)^2 - A^2\,\mathrm{cn}^2 u &= (B\,\mathrm{sn}\,u + C\,\mathrm{dn}\,u)^2 - \frac{C^2k'^2 - B^2}{k'^2}(\mathrm{dn}^2 u - k'^2\,\mathrm{sn}^2 u)\\&= \left(Ck'\,\mathrm{sn}\,u + \frac{B}{k'}\,\mathrm{dn}\,u\right)^2,\end{aligned}$$

et il vient, en définitive, après quelques réductions, pour l'expression de l'arc de la courbe sphérique,

$$s = \gamma\sqrt{\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}(\beta\delta+\alpha\delta-\beta\alpha)}\int k\,\mathrm{sn}\,u\,du + \beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)}\int \mathrm{dn}\,u\,du,$$

puis, en effectuant les intégrations,

$$\begin{aligned}s = \gamma&\sqrt{\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}(\beta\delta+\alpha\delta-\beta\alpha)}\log(\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u)\\&+ \beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)}\,\mathrm{am}\,u.\end{aligned}$$

Il en résulte que, u devenant $u + 4K$, l'arc s'accroît de la quantité constante, $2\pi\beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)}$.

XXI.

Je terminerai cette étude de la rotation en indiquant encore un point de vue sous lequel on peut traiter la question et où l'on évitera le défaut de symétrie des méthodes précédemment exposées, qui donnent d'abord les quantités A, B, C; puis, par un calcul différent, la quantité V, en séparant ainsi des expressions composées de la même manière avec les quatre fonctions fondamentales de Jacobi. Des transformations algébriques faciles des équations de la rotation, lorsqu'on suppose en général le corps sollicité par des forces quelconques, permettent, en effet, d'associer les composantes de la vitesse aux neuf cosinus; elles seront le point de départ du nouveau procédé que je vais donner pour le cas où il n'y a point de forces accélératrices. Avant de les exposer, je rappelle d'abord les équations d'Euler

$$\begin{aligned} \mathrm{a}\,D_t p &= (\mathrm{b}-\mathrm{c})qr + P,\\ \mathrm{b}\,D_t q &= (\mathrm{c}-\mathrm{a})rp + Q,\\ \mathrm{c}\,D_t r &= (\mathrm{a}-\mathrm{b})pq + R, \end{aligned}$$

où les moments d'inertie sont désignés par a, b, c, et celles de Poisson, dont j'ai déjà fait usage,

$$D_t a'' = b''r - c''q,\quad D_t b'' = c''p - a''r,\quad D_t c'' = a''q - b''p,$$

puis

$$D_t A = Br - Cq,\quad D_t B = Cp - Ar,\quad D_t C = Aq - Bp.$$

Cela étant, soit, comme précédemment,

$$\begin{aligned} v &= ap + bq + cr,\\ v' &= a'p + b'q + c'r,\\ v'' &= a''p + b''q + c''r,\\ V &= Ap + Bb + Cr; \end{aligned}$$

en écrivant, pour abréger,

$$\Delta = pD_t p + qD_t q + rD_t r - (a''p + b''q + c''r)(a''D_t p + b''D_t q + c''D_t r),$$

nous aurons, comme conséquence, les relations suivantes, que je vais démontrer :

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \text{II.}\\ A\Delta = V(D_t p - a''D_t v'') + iD_t V.D_t a'', & Va'' = Av'' + iD_t A,\\ B\Delta = V(D_t q - b''D_t v'') + iD_t V.D_t b'', & Vb'' = Bv'' + iD_t B,\\ C\Delta = V(D_t r - c''D_t v'') + iD_t V.D_t c''; & Vc'' = Cv'' + iD_t C; \end{array}$$

III.	IV.
$i\mathrm{CD}_t b'' = \mathrm{B}r + ic''\mathrm{D}_t\mathrm{B},$	$i\mathrm{BD}_t c'' = \mathrm{C}q + ib''\mathrm{D}_t\mathrm{C},$
$i\mathrm{AD}_t c'' = \mathrm{C}p + ia''\mathrm{D}_t\mathrm{C},$	$i\mathrm{CD}_t a'' = \mathrm{A}r + ic''\mathrm{D}_t\mathrm{A},$
$i\mathrm{BD}_t a'' = \mathrm{A}q + ib''\mathrm{D}_t\mathrm{A};$	$i\mathrm{AD}_t b'' = \mathrm{B}p + ia''\mathrm{D}_t\mathrm{B}.$

A cet effet, je remarque que, en écrivant Δ sous la forme

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}_t(p^2 + q^2 + r^2) - v''\mathrm{D}_t v'',$$

la condition $p^2 + q^2 + r^2 = v^2 + v'^2 + v''^2$ donne immédiatement

$$\Delta = v\mathrm{D}_t v + v'\mathrm{D}_t v'.$$

Observons encore qu'on tire des équations

$$v = ap + bq + cr, \quad v' = a'p + b'q + c'r,$$

en employant les égalités $ab' - ba' = c''$, $ca' - ac' = b''$, l'expression suivante :

$$a'v - av' = b''r - c''q = \mathrm{D}_t a''.$$

On a d'ailleurs immédiatement

$$\mathrm{D}_t p - a''\mathrm{D}_t v'' = a\mathrm{D}_t v + a'\mathrm{D}_t v',$$

et ces résultats transforment l'équation

$$\mathrm{A}\Delta = \mathrm{V}(\mathrm{D}_t p - a''\mathrm{D}_t v'') + i\mathrm{D}_t\mathrm{V}\,\mathrm{D}_t a''$$

dans la suivante :

$$(a+ia')(v\mathrm{D}_t v+v'\mathrm{D}_t v') = (v+iv')(a\mathrm{D}_t v+a'\mathrm{D}_t v') + i(\mathrm{D}_t v+i\mathrm{D}_t v')(a'v-av'),$$

qui est une identité.

Passons à l'égalité $\mathrm{V}a'' = \mathrm{A}v'' + i\mathrm{D}_t\mathrm{A}$; il suffit d'y remplacer les quantités V, v'', $\mathrm{D}_t\mathrm{A}$ par leurs expressions en A, B, C, p, q, r, ce qui donne

$$(\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r)a'' = \mathrm{A}(a''p + b''q + c''r) + i(\mathrm{B}r - \mathrm{C}q),$$

et par conséquent encore une identité, en l'écrivant ainsi :

$$q(\mathrm{B}a'' - \mathrm{A}b'' + i\mathrm{C}) + r(\mathrm{C}a'' - \mathrm{A}c'' - i\mathrm{B}) = 0.$$

Enfin les équations $i\mathrm{A}\mathrm{D}_t c'' = \mathrm{C}p + i\mathrm{D}_t \mathrm{C}a''$, $i\mathrm{A}\mathrm{D}_t b'' = \mathrm{B}p + i\mathrm{D}_t \mathrm{B}a''$ des systèmes III et IV conduisent, par un calcul semblable, en se servant des expressions de $\mathrm{D}_t c''$ et $\mathrm{D}_t b''$, aux mêmes égalités

$$\mathrm{A}b'' - \mathrm{B}a'' = i\mathrm{C}, \quad \mathrm{A}c'' - \mathrm{C}a'' = -\, i\mathrm{B};$$

elles se trouvent donc encore vérifiées ; or toutes les autres équations, dans les quatre systèmes, se démontreraient de même, ou se déduisent de celles que nous venons d'établir par un simple changement de lettres.

XXII.

J'applique maintenant ces résultats au cas où il n'y a point de forces accélératrices, et je pose à cet effet $p = \alpha a''$, $q = \beta b''$, $r = \gamma c''$, $v'' = \delta$, ce qui donne d'abord

$$\Delta = \alpha^2 a'' \mathrm{D}_t a'' + \beta^2 b'' \mathrm{D}_t b'' + \gamma^2 c'' \mathrm{D}_t c'' = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) a'' b'' c''.$$

Ayant ensuite $\mathrm{D}_t p - a'' \mathrm{D}_t v'' = \alpha(\gamma - \beta) b'' c''$, on voit que, en supprimant le facteur $(\gamma - \beta) b'' c''$, l'équation

$$\mathrm{A}\Delta = \mathrm{V}(\mathrm{D}_t p - a'' \mathrm{D}_t v'') + i\mathrm{D}_t \mathrm{V} \mathrm{D}_t a''$$

devient simplement

$$\mathrm{A}a''(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = \mathrm{V}\alpha + i\mathrm{D}_t \mathrm{V}.$$

Dans les trois autres systèmes, les réductions sont encore plus faciles, et nous nous trouvons ainsi amenés aux relations suivantes :

I.

$$\begin{aligned} \mathrm{A}a''(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) &= \mathrm{V}\alpha + i\mathrm{D}_t \mathrm{V}, \\ \mathrm{A}b''(\beta - \gamma)(\beta - \alpha) &= \mathrm{V}\beta + i\mathrm{D}_t \mathrm{V}, \\ \mathrm{A}c''(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) &= \mathrm{V}\gamma + i\mathrm{D}_t \mathrm{V}; \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}a'' &= \mathrm{A}\delta + i\mathrm{D}_t \mathrm{A}, \\ \mathrm{V}b'' &= \mathrm{B}\delta + i\mathrm{D}_t \mathrm{B}, \\ \mathrm{V}c'' &= \mathrm{C}\delta + i\mathrm{D}_t \mathrm{C}; \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} i\mathrm{C}a''(\alpha - \gamma) &= \mathrm{B}\gamma + i\mathrm{D}_t \mathrm{B}, \\ i\mathrm{A}b''(\beta - \alpha) &= \mathrm{C}\alpha + i\mathrm{D}_t \mathrm{C}, \\ i\mathrm{B}c''(\gamma - \beta) &= \mathrm{A}\beta + i\mathrm{D}_t \mathrm{A}; \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} i\mathrm{B}a''(\beta - \alpha) &= \mathrm{C}\beta + i\mathrm{D}_t \mathrm{C}, \\ i\mathrm{C}b''(\gamma - \beta) &= \mathrm{A}\gamma + i\mathrm{D}_t \mathrm{A}, \\ i\mathrm{A}c''(\alpha - \gamma) &= \mathrm{B}\alpha + i\mathrm{D}_t \mathrm{B}. \end{aligned}$$

La question est maintenant d'obtenir quatre fonctions A, B, C, V, qui vérifient à la fois ces douze équations. Nous ferons un premier pas vers notre but, par un changement d'inconnues, en posant

$$A = \frac{i}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathfrak{a},\quad B = \frac{\mathrm{dn}\,\omega}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathfrak{b},\quad C = -\frac{\mathrm{sn}\,\omega}{\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathfrak{c},\quad V = -in\mathfrak{v};$$

nous prendrons aussi la quantité u pour variable indépendante à la place de t; enfin, en employant les expressions de a'', b'', c'', on trouvera les transformées suivantes de nos équations :

I.

$$ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v},$$
$$k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v},$$
$$i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v};$$

II.

$$ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a},$$
$$k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b},$$
$$i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c};$$

III.

$$ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c},$$
$$k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a},$$
$$i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b};$$

IV.

$$ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b},$$
$$k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c},$$
$$i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a}.$$

Je ne m'arrêterai point aux calculs faciles qui donnent ces résultats, et je remarque immédiatement qu'il convient de les disposer dans ce nouvel ordre, à savoir :

$$\begin{array}{lll}
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v}, & k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c}, & i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{a} = \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b},\\
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c}, & k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v}, & i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{b} = \frac{i\beta}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a},\\
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b}, & k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a}, & i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{c} = \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{v} - D_u\mathfrak{v},\\
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{a} - D_u\mathfrak{a}, & k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{b} - D_u\mathfrak{b}, & i\,\mathrm{dn}\,u\,\mathfrak{v} = \frac{i\delta}{n}\mathfrak{c} - D_u\mathfrak{c}.
\end{array}$$

Par là se trouvent mises en évidence trois substitutions remarquables, qui correspondent aux multiplications des quatre fonctions par $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, à savoir :

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{a}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{a}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{c}\end{pmatrix};$$

elles ont la propriété caractéristique de laisser invariables les quantités du type $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})$, et, si on les applique deux fois, chacune d'elles donne la substitution identique. Représentons les quatre lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ par X_s pour les valeurs 0, 1, 2, 3 de l'indice, en convenant de prendre cet indice suivant le module 4; elles s'expriment comme il suit :

$$\begin{pmatrix}X_s \\ X_{3-s}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}X_s \\ X_{2+s}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}X_s \\ X_{1-s}\end{pmatrix}.$$

Si l'on adopte un autre ordre, en supposant que Z_s donne $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ pour $s=0, 1, 2, 3$, on retrouvera encore, sauf un certain échange, les mêmes fonctions de l'indice, à savoir :

$$\begin{pmatrix}Z_s \\ Z_{2+s}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}Z_s \\ Z_{1-s}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}Z_s \\ Z_{3-s}\end{pmatrix}.$$

C'est cette disposition qu'il convient de garder, et semblablement nous désignerons les constantes $\frac{i\gamma}{n}$, $\frac{i\alpha}{n}$, $\frac{i\beta}{n}$, $\frac{i\delta}{n}$ par ε_s pour $s=0, 1, 2, 3$; cela étant, nous pouvons comprendre, dans ces trois seules équations, le système de nos douze relations :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned} ik \operatorname{cn} u Z_s &= \varepsilon_s Z_{2+s} - D_u Z_{2+s}, \\ k \operatorname{sn} u Z_s &= \varepsilon_s Z_{1-s} - D_u Z_{1-s}, \\ i \operatorname{dn} u Z_s &= \varepsilon_s Z_{3-s} - D_u Z_{3-s}. \end{aligned}\right.$$

Le résultat relatif aux quantités X_s ne diffère de celui-ci qu'en ce que $ik \operatorname{cn} u$, $k \operatorname{sn} u$, $i \operatorname{dn} u$ se trouvent remplacés respectivement par $i \operatorname{dn} u$, $ik \operatorname{cn} u$, $k \operatorname{sn} u$; en désignant $\frac{i\alpha}{n}$, $\frac{i\beta}{n}$, $\frac{i\gamma}{n}$, $\frac{i\delta}{n}$ par η_s pour $s=0, 1, 2, 3$, nous aurons, en effet,

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{\begin{aligned} ik \operatorname{cn} u X_s &= \eta_s X_{3-s} - D_u X_{3-s}, \\ k \operatorname{sn} u X_s &= \eta_s X_{2+s} - D_u X_{2+s}, \\ i \operatorname{dn} u X_s &= \eta_s X_{1-s} - D_u X_{1-s}. \end{aligned}\right.$$

Avant d'aller plus loin, je crois devoir montrer comment ces deux systèmes d'équations se ramènent l'un à l'autre, par un changement très-simple de la variable et des constantes.

Je me fonderai, à cet effet, sur les formules de la transformation du premier ordre :

$$\mathrm{cn}\left(iku,\ \frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{sn}\left(iku,\ \frac{ik'}{k}\right) = \frac{ik\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{dn}\left(iku,\ \frac{ik'}{k}\right) = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},$$

en les écrivant de la manière suivante, où j'ai fait, pour abréger, $l = \frac{ik'}{k}$,

$$\begin{aligned} k'\,\mathrm{cn}(iku,\ l) &= -\,\mathrm{dn}(u - \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'),\\ l\,\mathrm{sn}(iku,\ l) &= +\,\mathrm{cn}(u - \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'),\\ \mathrm{dn}(iku,\ l) &= -\,\mathrm{sn}(u - \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'). \end{aligned}$$

Changeons, en effet, u en $u - \mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'$, et désignons par Z'_s ce que devient ainsi Z_s ; les équations (I) donneront celles-ci :

$$\begin{aligned} ikl\,\mathrm{sn}(iku,\ l)\mathrm{Z}'_s &= \varepsilon_s \mathrm{Z}'_{2+s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}'_{2+s},\\ -\,k'\,\mathrm{dn}(iku,\ l)\mathrm{Z}'_s &= \varepsilon_s \mathrm{Z}'_{1-s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}'_{1-s},\\ -\,ik'\,\mathrm{cn}(iku,\ l)\mathrm{Z}'_s &= \varepsilon_s \mathrm{Z}'_{3-s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}''_{3-s}. \end{aligned}$$

Soit encore Z''_s le résultat de la substitution de $\frac{u}{ik}$, au lieu de u, on trouvera, si l'on remarque que $il = -\frac{k'}{k}$,

$$\begin{aligned} l\,\mathrm{sn}(u,\ l)\mathrm{Z}''_s &= \frac{\varepsilon_s}{ik}\mathrm{Z}''_{2+s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}''_{2+s},\\ i\,\mathrm{dn}(u,\ l)\mathrm{Z}''_s &= \frac{\varepsilon_s}{ik}\mathrm{Z}''_{1-s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}''_{1-s},\\ il\,\mathrm{cn}(u,\ l)\mathrm{Z}''_s &= \frac{\varepsilon_s}{ik}\mathrm{Z}''_{3-s} - \mathrm{D}_u \mathrm{Z}''_{3-s}, \end{aligned}$$

nous sommes donc ainsi ramenés aux équations (II), en y remplaçant les constantes η_s par $\frac{\varepsilon_s}{ik}$, ce qui entraîne le changement de k en l.

Je vais montrer maintenant comment la théorie des fonctions elliptiques donne la solution de ces nouvelles équations auxquelles nous a conduit le problème de la rotation.

XXIII.

Je représenterai dans ce qui va suivre les fonctions $\Theta(u)$, $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$ par $\theta_0(u)$, $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, $\theta_3(u)$, en adoptant une notation employée pour la première fois par Jacobi dans ses leçons à l'Université de Kœnigsberg, et dont plusieurs auteurs ont depuis fait usage. L'une quelconque des quatre fonctions fondamentales sera ainsi désignée par $\theta_s(u)$, et je ferai de plus la convention que l'indice sera pris suivant le module 4, afin de pouvoir lui supposer une valeur entière quelconque. Cela posé, soit R_s le résidu correspondant au pôle $u = iK'$ de la quantité $\frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{\theta_0(u)}$, où a et λ sont des constantes quelconques, et posons

$$\Phi_s(u) = \frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{R_s\,\theta_0(u)}.$$

Nous définissons ainsi un système de quatre fonctions comprenant comme cas particuliers $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, lorsqu'on suppose $a = 0$, $\lambda = 0$, mais qui, en général, ne sont point doublement périodiques, et se reproduisent multipliées par des constantes, lorsqu'on change u en $u + 2K$ et en $u + 2iK'$ (¹). On a en effet, en posant $\mu = e^{2\lambda K}$, $\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{K} + 2i\lambda K'}$, les relations suivantes :

$$\Phi_s(u + 2K) = \mu(-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}\Phi_s(u),$$
$$\Phi_s(u + 2iK') = \mu'(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}\Phi_s(u),$$

et, en passant aux valeurs particulières de l'indice, les multiplicateurs seront indiqués comme il suit :

$$\begin{array}{lll} \Phi_0(s), & +\mu, & +\mu', \\ \Phi_1(s), & -\mu, & +\mu', \\ \Phi_2(s), & -\mu, & -\mu', \\ \Phi_3(s), & +\mu, & -\mu'. \end{array}$$

(¹) Peut-être pourrait-on, afin d'abréger, convenir de désigner les quantités de cette nature sous le nom de *fonctions doublement périodiques de seconde espèce*, les fonctions périodiques de première espèce correspondant au cas où les multiplicateurs seraient égaux à l'unité. Enfin les quantités telles que $\Theta(u)$, $H(u)$, ..., les fonctions intermédiaires de

L'étude de leurs propriétés pourrait peut-être former un chapitre nouveau dans la théorie des fonctions elliptiques, mais en ce moment je dois me borner à en tirer la solution que j'ai en vue du problème de la rotation. Je partirai de ce que les expressions $\Phi_s(u)$, ayant un seul pôle $u = i\mathrm{K}'$ à l'intérieur du rectangle des périodes et pour résidu correspondant l'unité, peuvent jouer le rôle d'éléments simples à l'égard des fonctions qui ont les mêmes multiplicateurs. Telles seront, par exemple, les quantités

$$\mathrm{cn}\,u\,\Phi_s(u),\quad \mathrm{sn}\,u\,\Phi_s(u),\quad \mathrm{dn}\,u\,\Phi_s(u);$$

si l'on remarque qu'en mettant $2+s$, $1-s$, $3-s$ au lieu de s, le facteur $(-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}$ se reproduit multiplié par -1, -1, $+1$, tandis que $(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}$ est multiplié successivement par -1, $+1$, -1, on reconnaît en effet qu'elles ont respectivement les multiplicateurs des fonctions

$$\Phi_{2+s}(u),\quad \Phi_{1-s}(u),\quad \Phi_{3-s}(u).$$

Nous voyons aussi qu'elles n'admettent que le pôle $u = i\mathrm{K}'$, dans le rectangle des périodes, de sorte que la décomposition en éléments simples s'obtiendra immédiatement au moyen de la partie principale des trois développements

$$\mathrm{cn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\quad \mathrm{sn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\quad \mathrm{dn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon).$$

Or on a, sans aucun terme constant dans les seconds membres,

$$ik\,\mathrm{cn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon},\quad k\,\mathrm{sn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon},\quad i\,\mathrm{dn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon},$$

et par conséquent il suffit de calculer les deux premiers termes du développement de l'autre facteur $\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$, c'est-à-dire le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, et le terme constant. J'emploie à cet effet la relation, sur laquelle je reviendrai tout à l'heure,

$$\theta_s(u+i\mathrm{K}') = \sigma\theta_{1-s}(u)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')},$$

MM. Briot et Bouquet, où les multiplicateurs sont des exponentielles, recevraient par analogie le nom de *fonctions périodiques de troisième espèce*.

où σ est égal à i pour $s=0$, $s=1$, et à l'unité, si l'on suppose $s=2$, $s=3$, de sorte qu'on peut faire $\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)}$. On en conclut l'expression suivante :

$$\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \mathrm{A}\frac{\theta_{1-s}(a+\varepsilon)e^{\lambda\varepsilon}}{\theta_1(\varepsilon)}.$$

A désignant un facteur constant, et par suite ce développement, que je limite à ses deux premiers termes :

$$\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \frac{\mathrm{A}\,\theta_{1-s}(a)}{\theta'_1(0)}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a)\right].$$

Mais A doit être tel que le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ soit l'unité; nous avons donc simplement

$$\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a),$$

et l'on voit que les parties principales des développements des fonctions

$$\begin{gathered} ik \operatorname{cn}(i\mathrm{K}' + \varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon), \\ k \operatorname{sn}(i\mathrm{K}' + \varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon), \\ i \operatorname{dn}(i\mathrm{K}' + \varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}' + \varepsilon) \end{gathered}$$

se réduisent à cette seule et même expression dans les trois cas, à savoir :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + [\lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a)]\frac{1}{\varepsilon}.$$

» La formule générale de décomposition en éléments simples nous donne en conséquence les relations suivantes :

$$\begin{aligned} ik \operatorname{cn} u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{2+s}(u) - \mathrm{D}_u \Phi_{2+s}(u), \\ k \operatorname{sn} u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{1-s}(u) - \mathrm{D}_u \Phi_{1-s}(u), \\ i \operatorname{dn} u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{3-s}(u) - \mathrm{D}_u \Phi_{3-s}(u); \end{aligned}$$

et l'on voit qu'on les identifiera aux équations (I), obtenues dans le paragraphe précédent, en disposant des indéterminées a et λ de manière à avoir

$$\varepsilon_s = \lambda + \mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}(a).$$

Reprenons, à cet effet, les égalités données, p. 36, § XV,

$$\alpha - \beta = in\frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}, \quad \alpha - \delta = in\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}, \quad \gamma - \alpha = in\frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega},$$

en les écrivant d'abord de cette manière (voir p. 37) :

$$\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n} + \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n} + \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} = \frac{i\delta}{n} + \frac{\mathrm{H}'_1(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)}.$$

Rappelons ensuite que les constantes $\frac{i\gamma}{n}, \frac{i\alpha}{n}, \frac{i\beta}{n}, \frac{i\delta}{n}$ ont été désignées par ε_s pour $s = 0, 1, 2, 3$, et elles prendront, en introduisant les quantités $\theta_s(\omega)$, cette nouvelle forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \mathrm{D}_\omega \log\theta_0(\omega) &= \varepsilon_2 + \mathrm{D}_\omega \log\theta_3(\omega) \\ &= \varepsilon_0 + \mathrm{D}_\omega \log\theta_1(\omega) = \varepsilon_3 + \mathrm{D}_\omega \log\theta_2(\omega). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'expression

$$\varepsilon_s + \mathrm{D}_\omega \log\theta_{1-s}(\omega)$$

reste la même pour toutes les valeurs de s ; par conséquent on satisfait immédiatement à la condition posée en faisant

$$a = -\omega \quad \text{et} \quad \lambda = \varepsilon_s + \mathrm{D}_\omega \log\theta_{1-s}(\omega).$$

XXIV.

Les résultats que nous venons d'obtenir montrent encore par un nouvel exemple combien la question de la rotation se trouve intimement liée à la théorie des fonctions elliptiques. C'est même à l'étude d'un problème de Mécanique qu'est due la considération de ces nouveaux éléments analytiques $\Phi_s(u)$, très-voisins des fonctions $\varphi(x, \omega)$, $\varphi_1(x, \omega)$, $\chi(x, \omega)$, $\chi_1(x, \omega)$, employées au commencement de ce travail pour intégrer l'équation de Lamé, mais qui en sont néanmoins distincts et offrent un ensemble de propriétés propres. Il est nécessaire, en effet, d'attribuer à la constante λ quatre valeurs particulières pour en déduire ces dernières fonctions, et de là résultent, pour les multiplicateurs de chacune d'elles, des déterminations essentiellement différentes, tandis que la propriété essentielle qui réunit en un seul système les fonctions $\Phi_s(u)$, c'est d'avoir, sauf le signe, les mêmes multiplicateurs. Je me bornerai à leur égard à considérer, pour en donner l'intégrale complète, les équations différentielles auxquelles elles satisfont, équations linéaires et du second ordre comme celle de Lamé; mais auparavant je dois d'abord montrer comment les formules de Jacobi résultent de l'expression à laquelle nous venons de parvenir, $Z_s = \mathrm{N}\,\Phi_s(u)$, où N désigne une constante. J'emploie, à cet effet, la valeur de R_s, qu'on obtient facilement sous la forme

$$\mathrm{R}_s = \frac{\sigma\,\theta_{1-s}(a)\,e^{-\frac{i\pi a}{2\mathrm{K}} + i\lambda\mathrm{K}'}}{i\,\theta'_1(0)}$$

et où l'on doit faire $a = -\omega$. En se rappelant la détermination du facteur σ, et écrivant pour un moment

$$\Omega = \sigma\,\frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2\mathrm{K}} + i\lambda\mathrm{K}'}}{i\,\theta'_1(0)};$$

nous obtenons ainsi

$$\mathrm{R}_0 = -\,i\Omega\,\theta_1(\omega), \quad \mathrm{R}_1 = i\Omega\,\theta_0(\omega), \quad \mathrm{R}_2 = \Omega\,\theta_3(\omega), \quad \mathrm{R}_3 = \Omega\,\theta_2(\omega).$$

Or on a

$$\mathrm{A} = \frac{i}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathrm{Z}_1, \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{dn}\,\omega}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathrm{Z}_2, \quad \mathrm{C} = -\,\frac{\mathrm{sn}\,\omega}{\mathrm{cn}\,\omega}\,\mathrm{Z}_0, \quad \mathrm{V} = -\,in\mathrm{Z}_3;$$

de là résultent, si l'on remplace N par ΩN et les quantités θ_s par Θ, H, ..., les valeurs suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{i\mathrm{N}}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\frac{\mathrm{H}(u-\omega)e^{\lambda u}}{i\,\Theta(\omega)\,\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{kk'}}\,\frac{\mathrm{H}(u-\omega)e^{\lambda u}}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)},$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{N}}{k\,\mathrm{cn}\,\omega}\,\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)e^{\lambda u}}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(u)} = \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)e^{\lambda u}}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)},$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{N}}{\mathrm{cn}\,\omega}\,\frac{\Theta(u-\omega)e^{\lambda u}}{i\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(u)} = \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta(u-\omega)e^{\lambda u}}{i\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)},$$

$$\mathrm{V} = -\,in\mathrm{N}\,\frac{\Theta_1(u-\omega)e^{\lambda u}}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}.$$

Je ne m'arrête pas à la détermination de la constante N, qui s'obtient comme on l'a déjà vu au § XIV, p. 31; elle a pour valeur $H'(o)e^{i\nu}$, et nous retrouvons bien, sauf le changement de λ en $i\lambda$, les résultats qu'il fallait obtenir.

Je reviens encore un moment sur la désignation par $\theta_s(u)$ des quatre fonctions fondamentales de Jacobi, afin de la rapprocher de la notation qui résulte de la définition même de ces fonctions, par la série

$$\theta_{\mu,\nu}(u) = e^{-\frac{\mu\nu i\pi}{2}} \sum (-1)^{m\nu} e^{\frac{i\pi}{K}\left[(2m+\mu)u + \frac{1}{4}(2m+\mu)^2 iK'\right]}.$$

Supposant μ et ν égaux à zéro ou à l'unité, on a donc en même temps

$$\begin{aligned} \Theta\,(u) &= \theta_0(u) = \theta_{0,1}(u), \\ H\,(u) &= \theta_1(u) = \theta_{1,1}(u), \\ H_1(u) &= \theta_2(u) = \theta_{0,1}(u), \\ \Theta_1(u) &= \theta_3(u) = \theta_{0,0}(u); \end{aligned}$$

et, en premier lieu, je remarquerai que le système des quatre équations fondamentales

$$\begin{aligned} \Theta\,(u+iK') &= iH(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ H\,(u+iK') &= i\Theta(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ H_1(u+\;K') &= \Theta_1(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ \Theta_1(u+iK') &= H_1(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')} \end{aligned}$$

peut être remplacé par la relation unique dont j'ai déjà fait usage, à savoir

$$\theta_s(u+iK') = \sigma\theta_{1-s}(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}.$$

On doit y joindre les suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_s(u+K) &= \sigma'\theta_{3-s}(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ \theta_s(u+K+iK') &= \sigma''\theta_{2+s}(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \end{aligned}$$

les facteurs σ, σ', σ'' ayant pour valeurs

$$\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)}, \quad \sigma' = e^{\frac{i\pi}{2}s(s^2-1)}, \quad \sigma'' = e^{-\frac{i\pi}{4}s(s-1)};$$

puis celles-ci :

$$\theta_s(u+2K) = \quad (-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}\theta_s(u),$$

$$\theta_s(u+2iK') = -(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}\theta_s(u)e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')}.$$

Je remarquerai enfin qu'en passant du système de deux indices à un indice unique on est amené à exprimer, d'une manière générale, s au moyen de μ et ν. Si nous avons égard à la convention admise que s est pris suivant le module 4, on trouve aisément l'expression

$$s \equiv -1 - \mu + \nu + 2\mu\nu.$$

Cela étant, soit de même

$$s' \equiv -1 - \mu' + \nu' + 2\mu'\nu',$$

et désignons par S la quantité relative aux sommes $\mu + \mu'$ et $\nu + \nu'$. Les admirables travaux de M. Weierstrass ayant montré de quelle importance est, pour la théorie des fonctions abéliennes, l'addition des indices dans les fonctions θ à n variables, où entrent $2n$ quantités analogues à μ et ν, on est amené, dans le cas le plus simple des fonctions elliptiques, à chercher l'expression de S en s et s'. M. Lipschitz m'a communiqué la solution de cette question par la formule élégante

$$S \equiv -1 - s - s' - 2ss' \quad (\text{mod. } 4),$$

et voici comment l'éminent géomètre la démontre. Écrivons l'égalité précédemment donnée : $2s \equiv -1 - \mu + \nu + 2\mu\nu$ sous cette forme

$$2s + 1 \equiv (2\mu + 1)(2\nu - 1) \quad (\text{mod. } 8),$$

et remarquons qu'on peut poser, μ et ν étant zéro ou l'unité,

$$2\mu + 1 \equiv 3^\mu, \quad 2\nu - 1 \equiv -7^\nu \quad (\text{mod. } 8).$$

On en conclura

$$2s + 1 \equiv -3^{\mu}7^{\nu} \pmod{8};$$

or les relations analogues

$$2s' + 1 \equiv -3^{\mu'}7^{\nu'}, \quad 2S + 1 \equiv -3^{\mu+\mu'}7^{\nu+\nu'} \pmod{8}$$

donneront immédiatement :

$$2S + 1 \equiv -(2s+1)(2s'+1) \pmod{8},$$

et l'on en conclut l'équation qu'il s'agissait d'obtenir.

XXV.

Nous avons vu que le système des quatre fonctions représentées, en faisant $s = 0, 1, 2, 3$, par l'expression

$$\Phi_s(u) = \frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{R_s \theta_0(u)},$$

où a et λ sont des constantes quelconques et R_s le résidu correspondant au pôle $u = iK'$ de $\frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{\theta_0(u)}$, conduit aux équations différentielles suivantes (§ XXIII, p. 62) :

$$\begin{aligned}
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + D_a \log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{2+s}(u) - D_u\Phi_{2+s}(u),\\
k\,\mathrm{sn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + D_a \log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{1-s}(u) - D_u\Phi_{1-s}(u),\\
i\,\mathrm{dn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + D_a \log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{3-s}(u) - D_u\Phi_{3-s}(u).
\end{aligned}$$

Ces relations me paraissent appeler l'attention, comme donnant d'ellesmêmes des équations linéaires du second ordre, dont la solution complète s'obtient, ainsi que celle de Lamé, dans le cas de $n = 1$, par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant la demi-période iK' pour infini simple. Pour y parvenir facilement, il convient de représenter les quantités $ik\,\mathrm{cn}\,u$, $k\,\mathrm{sn}\,u$, $i\,\mathrm{dn}\,u$ par U_1, U_2, U_3, de manière à avoir sous forme entièrement symétrique :

$$D_u U_1 = -U_2 U_3, \quad D_u U_2 = -U_1 U_3, \quad D_u U_3 = -U_1 U_2.$$

Cela étant, si nous changeons successivement s en $2+s$, $1-s$, $3-s$, on obtiendra, en écrivant, pour abréger, Φ_s au lieu de $\Phi_s(u)$ et ε_s pour $\lambda + D_a \log\theta_{1-s}(a)$, ces trois groupes de deux équations, à savoir :

$$\begin{cases} U_1\Phi_s \;\;= \varepsilon_s \;\;\Phi_{2+s} - D_u\Phi_{2+s}, \\ U_1\Phi_{2+s} = \varepsilon_{2+s}\Phi_s \;\; - D_u\Phi_s, \end{cases}$$
$$\begin{cases} U_2\Phi_s \;\;= \varepsilon_s \;\;\Phi_{1-s} - D_u\Phi_{1-s}, \\ U_2\Phi_{1-s} = \varepsilon_{1-s}\Phi_s \;\; - D_u\Phi_s, \end{cases}$$
$$\begin{cases} U_3\Phi_s \;\;= \varepsilon_s \;\;\Phi_{3-s} - D_u\Phi_{3-s}, \\ U_3\Phi_{3-s} = \varepsilon_{3-s}\Phi_s \;\; - D_u\Phi_s. \end{cases}$$

L'élimination successive des quantités Φ_{2+s}, Φ_{1-s}, Φ_{3-s} donne ensuite

$$\text{(I)}\quad D_u^2\Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s} + D_u\log U_1)D_u\Phi_s + (\varepsilon_s\varepsilon_{2+s} + \varepsilon_{2+s}D_u\log U_1 - U_1^2)\Phi_s = 0,$$
$$\text{(II)}\quad D_u^2\Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{1-s} + D_u\log U_2)D_u\Phi_s + (\varepsilon_s\varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{1-s}D_u\log U_2 - U_2^2)\Phi_s = 0,$$
$$\text{(III)}\quad D_u^2\Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{3-s} + D_u\log U_3)D_u\Phi_s + (\varepsilon_s\varepsilon_{3-s} + \varepsilon_{3-s}D_u\log U_3 - U_3^2)\Phi_s = 0.$$

Nous avons donc trois équations du second ordre dont une solution particulière est la fonction $\Phi_s(u)$; voici comment on parvient à les intégrer complètement.

» Faisons successivement dans (I), (II) et (III)

$$\Phi_s = X_1 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s})},$$
$$\Phi_s = X_2 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{1-s})},$$
$$\Phi_s = X_3 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{3-s})};$$

on aura pour transformées :

$$D_u^2X_1 - D_u\log U_1 D_uX_1 - (\delta_1^2 + \delta_1 D_u\log U_1 + U_1^2)X_1 = 0,$$
$$D_u^2X_2 - D_u\log U_2 D_uX_2 - (\delta_2^2 + \delta_2 D_u\log U_2 + U_2^2)X_2 = 0,$$
$$D_u^2X_3 - D_u\log U_3 D_uX_3 - (\delta_3^2 + \delta_3 D_u\log U_3 + U_3^2)X_3 = 0,$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$\delta_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{2+s}),\quad \delta_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{1-s}),\quad \delta_3 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{3-s}).$$

Je remarque maintenant que ces équations ne changent pas si, en remplaçant dans la première, la deuxième et la troisième, s par $2+s$, $1-s$ et $3-s$, on écrit dans toutes en même temps $-u$ au lieu de u. Par conséquent, on peut, d'une solution, en tirer une autre : la première, par exemple, qui est vérifiée en prenant

$$X_1 = \Phi_s(u) e^{-\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{1+s})},$$

le sera encore si l'on fait

$$X_1 = \Phi_{2+s}(-u) e^{+\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{1+s})}.$$

En employant les formules

$$\varepsilon_s = \lambda + D_a \log \theta_{1-s}(a), \quad \varepsilon_{2+s} = \lambda + D_a \log \theta_{3-s}(a),$$

et mettant pour abréger θ_s au lieu de $\theta_s(a)$, on en conclut pour l'intégrale générale

$$X_1 = \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}} + \frac{C'\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}}.$$

Les solutions des deux autres équations seront semblablement

$$X_2 = \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s\theta_{1-s}} + \frac{C'\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s\theta_{1-s}},$$

$$X_3 = \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s\theta_{2+s}} + \frac{C'\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s\theta_{2+s}}.$$

XXVI.

Les relations qui nous ont servi de point de départ donnent lieu à d'autres combinaisons dont se tirent de nouvelles équations du second ordre analogues aux précédentes, et qu'il est important de former. On a, par exemple, comme on le voit facilement,

$$U_1(\varepsilon_s \Phi_{1-s} - D_u \Phi_{1-s}) = U_2(\varepsilon_s \Phi_{2+s} - D_u \Phi_{2+s}),$$

et l'on en conclut, en changeant s en $1-s$,

$$U_1(\varepsilon_{1-s} \Phi_s - D_u \Phi_s) = U_2(\varepsilon_{1-s} \Phi_{3-s} - D_u \Phi_{3-s}).$$

Joignons à cette équation la suivante :

$$U_3 \Phi_{3-s} = \varepsilon_{3-s} \Phi_s - D_u \Phi_s,$$

et l'on trouvera, par l'élimination de Φ_{3-s},

$$\begin{aligned} D_u^2\Phi_s &- (\varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{3-s} + D_u \log U_2 U_3) D_u \Phi_s \\ &+ (\varepsilon_{1-s}\varepsilon_{3-s} + \varepsilon_{1-s} D_u \log U_2 + \varepsilon_{3-s} D_u \log U_3)\Phi_s = 0. \end{aligned}$$

De simples changements de lettres donneront ensuite

$$\begin{aligned} D_u^2\Phi_s &- (\varepsilon_{3-s} + \varepsilon_{2+s} + D_u \log U_1 U_3) D_u \Phi_s \\ &+ (\varepsilon_{3-s}\varepsilon_{2+s} + \varepsilon_{3-s} D_u \log U_3 + \varepsilon_{2+s} D_u \log U_1)\Phi_s = 0, \\ D_u^2\Phi_s &- (\varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{2+s} + D_u \log U_1 U_2) D_u \Phi_s \\ &+ (\varepsilon_{1-s}\varepsilon_{2+s} + \varepsilon_{1-s} D_u \log U_2 + \varepsilon_{2+s} D_u \log U_1)\Phi_s = 0, \end{aligned}$$

Cela posé, je fais dans la première, la deuxième et la troisième de ces équations, les substitutions

$$\begin{aligned} \Phi_s &= Y_1 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{3-s})}, \\ \Phi_s &= Y_2 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{3-s} + \varepsilon_{2+s})}, \\ \Phi_s &= Y_3 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{2+s})}. \end{aligned}$$

J'écris aussi, pour abréger,

$$\delta'_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1-s} - \varepsilon_{3-s}), \quad \delta'_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{2+s} - \varepsilon_{3-s}), \quad \delta'' = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{2+s} - \varepsilon_{1-s});$$

les transformées qui en résultent, savoir :

$$\begin{aligned} D_u^2 Y_1 - D_u \log U_2 U_3 D_u Y_1 - \left(\delta'^2_1 - \delta'_1 D_u \log \frac{U_2}{U_3}\right) Y_1 &= 0, \\ D_u^2 Y_2 - D_u \log U_1 U_3 D_u Y_2 - \left(\delta'^2_2 - \delta'_2 D_u \log \frac{U_1}{U_3}\right) Y_2 &= 0, \\ D_u^2 Y_3 - D_u \log U_1 U_2 D_u Y_3 - \left(\delta'^2_3 - \delta'_3 D_u \log \frac{U_2}{U_1}\right) Y_3 &= 0, \end{aligned}$$

se reproduisent comme les équations en X, lorsqu'on change s en $2+s$, $1-s$, $3-s$ et u en $-u$, les quantités δ et δ', ainsi que les dérivées logarithmiques, changeant de signe. On en conclut immédiatement pour les intégrales complètes les formules

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{2+s}} + \frac{C'\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{2+s}}, \\ Y_2 &= \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_{2+s} \theta_{3-s}} + \frac{C'\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_{2+s} \theta_{3-s}}, \\ Y_3 &= \frac{C\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{3-s}} + \frac{C'\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{3-s}}. \end{aligned}$$

Ce sont donc les mêmes quotients des fonctions θ qui figurent dans les valeurs de X_1 et Y_1, X_2 et Y_2, X_3 et Y_3, les exponentielles qui multiplient ces quotients étant seules différentes. Cette circonstance fait présumer l'existence d'équations linéaires du second ordre plus générales, dont la solution s'obtiendrait en remplaçant, dans les expressions $CA + C'B$ des quantités X et Y, les fonctions déterminées A et B par Ae^{pu} et Be^{-pu}, où p est une constante quelconque; voici comment on les obtient.

XXVII.

Considérons en général une équation linéaire du second ordre à laquelle nous donnerons la forme suivante :

$$PX'' - P'X' + QX = 0,$$

où P et Q sont des fonctions quelconques de la variable u, et dont l'intégrale soit

$$X = CA + C'B.$$

Je dis que, si l'on connaît le produit de deux solutions particulières, et qu'on fasse en conséquence

$$AB = R,$$

nous pourrons obtenir l'équation qui aurait pour solution l'expression plus générale

$$\mathfrak{X} = CAe^{pu} + C'Be^{-pu}.$$

J'observe à cet effet que, le résultat de l'élimination des constantes C et C' étant

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} & A & B \\ \mathfrak{X}' & Ap + A' & -Bp + B' \\ \mathfrak{X}'' & Ap^2 + 2A'p + A'' & Bp^2 - 2B'p + B'' \end{vmatrix} = 0,$$

le développement du déterminant donne pour l'équation cherchée

$$\mathfrak{P}\mathfrak{X}'' - \mathfrak{P}'\mathfrak{X}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{X} = 0,$$

les nouvelles fonctions $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ayant pour expressions

$$\mathfrak{P} = AB' - BA' - 2ABp,$$
$$\mathfrak{Q} = A'B'' - B'A'' + (AB'' - 4A'B' + BA'')p - 3(AB' - BA')p^2 + 2ABp^3.$$

Or on a, quelles que soient les solutions particulières A et B, la relation

$$AB' - BA' = Pg,$$

en désignant par g une constante dont voici la détermination.

Donnons à la variable une valeur $u = u_0$ qui annule B dans cette équation et la suivante :

$$AB' + BA' = R',$$

et soient P_0 et R'_0 les valeurs que prennent P et R; on trouvera immédiatement la condition

$$P_0 g = R'_0.$$

La constante g étant ainsi connue, nous avons déjà la formule

$$\mathfrak{P} = Pg - 2Rp.$$

Pour obtenir $\mathfrak{Q}$, je remarque d'abord qu'on peut écrire

$$A'B'' - B'A'' = \frac{P'B' - QB}{P} A' - \frac{P'A' - QA}{P} B' = Qg,$$

puis semblablement

$$AB'' + BA'' = \frac{P'B' - QB}{P} A + \frac{P'A' - QA}{P} B = \frac{P'R' - 2QR}{P};$$

nous avons d'ailleurs

$$AB'' + 2A'B' + BA'' = R'',$$

par conséquent

$$AB'' - 4A'B' + BA'' = -\frac{2PR'' - 3P'R' + 6QR}{P},$$

et l'on en conclut la valeur cherchée :

$$\mathfrak{Q} = Qg - \frac{2PR'' - 3P'R' + 6QR}{P} p - 3Pgp^2 + 2Rp^3.$$

Ce point établi, j'envisage, dans les équations différentielles en X_1, X_2, X_3, les expressions du produit AB, que je désignerai successivement par $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$, en faisant

$$R_1(u) = \frac{\theta'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$

$$R_2(u) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_s(a)\,\theta_{1-s}(a)},$$

$$R_3(u) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Les formules élémentaires concernant les fonctions θ donneraient ces quantités pour chaque valeur de s, mais j'y parviendrai par une autre voie en conservant l'indice variable. Et d'abord, au moyen des relations

$$\theta_s(u + 2K) = (-1)^{\frac{s(s+1)}{2}}\theta_s(u),$$

$$\theta_s(u + 2iK') = (-1)^{\frac{(s+1)(s+2)}{2}}\theta_s(u)e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

on obtient

$$R_1(u + 2K) = -R_1(u), \quad R_1(u + 2iK') = -R_1(u),$$
$$R_2(u + 2K) = -R_2(u), \quad R_2(u + 2iK') = +R_2(u),$$
$$R_3(u + 2K) = +R_3(u), \quad R_3(u + 2iK') = -R_3(u).$$

Les fonctions $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$ possèdent ainsi la même périodicité que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, par conséquent les quantités proportionnelles U_1, U_2, U_3, ayant le seul pôle $u = iK'$ à l'intérieur du rectangle des périodes $2K$, $2iK'$, et pour résidu correspondant l'unité, peuvent servir, à leur égard, d'éléments simples. Employons maintenant l'équation

$$\theta_s(u + iK') = \sigma\,\theta_{1-s}(u)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')},$$

où j'ai posé

$$\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)},$$

et désignons par σ_1, σ_2, σ_3 ce que devient σ, et, changeant s en $2+s$,

$1-s$, $3-s$, nous trouverons (¹) :

$$R_1(iK'+\varepsilon) = -\sigma\sigma_1 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{3-s}(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$
$$R_2(iK'+\varepsilon) = -\sigma\sigma_2 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_s(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_s(a)},$$
$$R_3(iK'+\varepsilon) = -\sigma\sigma_3 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{2+s}(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Cela étant, comme on peut introduire à volonté un facteur constant dans la fonction R, je prends, au lieu des expressions précédentes, celles-ci, qui en diffèrent seulement par le signe ou le facteur $\pm i$, savoir :

$$R_1(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{3-s}(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$
$$R_2(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_s(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_s(a)},$$
$$R_3(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{2+s}(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Développant donc suivant les puissances de ε et faisant usage des quantités δ, précédemment introduites, qui donnent :

$$\frac{\theta_{1-s}'(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta_{3-s}'(a)}{\theta_{3-s}(a)} = 2\delta_1,$$
$$\frac{\theta_{1-s}'(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta_s'(a)}{\theta_s(a)} = 2\delta_2,$$
$$\frac{\theta_{1-s}'(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta_{2+s}'(a)}{\theta_{2+s}(a)} = 2\delta_3,$$

nous obtenons, pour les parties principales, les quantités

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2\delta_1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2\delta_2}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2\delta_3}{\varepsilon},$$

et l'on en conclut les valeurs suivantes, qu'il s'agissait d'obtenir :

$$R_1(u) = 2\delta_1 U_1 - D_u U_1,$$
$$R_2(u) = 2\delta_2 U_2 - D_u U_2,$$
$$R_3(u) = 2\delta_3 U_3 - D_u U_3.$$

(¹) On démontre facilement qu'on a

$$\sigma\sigma_1 = -(-1)i^{\frac{s(s-1)}{2}}, \quad \sigma\sigma_2 = 1, \quad \sigma\sigma_3 = -i$$

Ces résultats nous permettent de former les fonctions $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$; mais, pour la deuxième, le calcul est un peu long, et je me bornerai à en retenir cette conclusion, que dans les trois cas on parvient, en désignant par U une quantité qui soit successivement U_1, U_2, U_3, à des expressions de cette forme :

$$\mathfrak{P} = \alpha U + \alpha' D_u U,$$
$$\mathfrak{Q} = \beta U + \beta' D_u U + \beta'' D_u^2 U,$$

où les coefficients α et β sont des constantes. Leur complication tient à ce qu'ils sont exprimés au moyen des quantités a et p qui figurent explicitement dans l'intégrale, et nous allons voir comment l'introduction d'autres éléments conduit à des valeurs beaucoup plus simples.

XXVIII.

Soient U et U_1 deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce ayant chacune un pôle unique $u = 0$, et représentées par les formules

$$U = \frac{H(u+\alpha)e^{pu}}{H(u)}, \quad U_1 = \frac{H(u+\beta)e^{qu}}{H(u)};$$

je me propose de former en général l'équation du second ordre, admettant pour intégrale l'expression

$$\mathfrak{X} = CU + C'U_1,$$

qui est

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} & U & U_1 \\ \mathfrak{X}' & U' & U'_1 \\ \mathfrak{X}'' & U'' & U''_1 \end{vmatrix} = \mathfrak{P}\mathfrak{X}'' - \mathfrak{P}'\mathfrak{X}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{X} = 0,$$

en posant

$$\mathfrak{P} = UU'_1 - U_1U', \quad \mathfrak{Q} = U'U''_1 - U'_1U''.$$

Nommons pour un moment μ et μ' les multiplicateurs de A, ν et ν' ceux de B; on voit d'abord que les coefficients $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont des fonctions de seconde espèce aux multiplicateurs $\mu\nu$ et $\mu'\nu'$, ayant de même pour seul pôle $u = 0$, qui est un infini double pour $\mathfrak{P}$ et un infini triple pour $\mathfrak{Q}$. L'équation $\mathfrak{P} = 0$ n'admet ainsi à l'intérieur du rectangle des périodes que deux racines, $u = a$ et $u = b$, et, en décomposant en éléments simples les fonctions de première espèce, $\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}$, on aura les expressions suivantes :

$$\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}} = \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} + \frac{H'(u-b)}{H(u-b)} - 2\frac{H'(u)}{H(u)} + \lambda,$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}} = \frac{PH'(u-a)}{H(u-a)} + \frac{QH'(u-b)}{H(u-b)} + \frac{RH'(u)}{H(u)} + S,$$

où P, Q, ... sont des constantes assujetties à la condition $P + Q + R = 0$.

Les quantités a et b, que nous venons d'introduire, représentent donc, à l'égard de l'équation différentielle, des points que M. Weierstrass nomme *à apparence singulière*, $u = 0$ étant seul un point singulier. Ce sont les véritables éléments qu'il convient d'employer comme appropriés à la formation de l'équation différentielle, au lieu des constantes α, β, p, q qui entrent dans les fonctions A et B. Je me fonderai, à cet effet, sur le lemme suivant, qui donnera, par un calcul facile, la détermination des coefficients P, Q, ...

Considérons l'équation différentielle

$$y'' - f(u)y' + g(u)y = 0,$$

où les fonctions uniformes $f(u)$, $g(u)$ admettent seulement des infinis simples qui soient, d'une part, $u = 0$ et, de l'autre, $u = a, b, c, \ldots$. Posons d'abord, en développant suivant les puissances croissantes de ε,

$$f(\varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + F + \ldots, \quad g(\varepsilon) = \frac{G}{\varepsilon} + \ldots,$$

et en second lieu, pour les diverses quantités a, b, c, ...,

$$f(a+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + f_a + \ldots, \quad g(a+\varepsilon) = \frac{g_a}{\varepsilon} + g'_a + \ldots .$$

Si l'on a, d'une part,

$$F + G = 0,$$

puis, pour toutes les quantités a, b, c, ...,

$$g'_a = g_a(f_a - g_a),$$

l'intégrale de l'équation proposée sera une fonction uniforme ayant pour seul point singulier $u = 0$, et, dans le domaine de ce point, les intégrales nommées *fondamentales* par M. Fuchs seront de la forme $\varphi_1(u)$ et $\frac{1}{u} + \varphi_2(u)$, où $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ représentent des séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes entières et positives de la variable.

XXIX.

Ce sont ces belles et importantes découvertes de M. Füchs dans la théorie générale des équations différentielles linéaires qui permettent ainsi d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale complète de l'équation considérée soit une fonction uniforme de la variable. Il n'est pas inutile, à l'égard de ces conditions, de remarquer qu'elles se conservent, comme on le vérifie aisément, dans les transformées auxquelles conduit la substitution $y = ze^{-\alpha x}$, à savoir

$$z'' - [2\alpha + f(u)]z' + [\alpha^2 + \alpha f(u) + g(u)]z = 0.$$

J'observe encore que l'on peut supposer doublement périodiques les fonctions $f(u)$ et $g(u)$, en convenant que les quantités $u = 0$, $u = a$, $u = b$, ..., au lieu de représenter tous leurs pôles, désigneront seulement ceux de ces pôles qui sont à l'intérieur du rectangle des périodes. Soit donc, en nous plaçant dans ce cas,

$$f(u) = \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}},$$
$$g(u) = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}},$$

ou bien, d'après la remarque qui vient d'être faite,

$$f(u) = 2\alpha + \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}},$$
$$g(u) = \alpha^2 + \alpha\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}} + \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}},$$

α étant une constante arbitraire. Je disposerai de cette constante de sorte qu'on ait

$$f(u) = \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} + \frac{H'(u-b)}{H(u-b)} - 2\frac{H'(u)}{H(u)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)},$$

et par conséquent, d'après les formules connues,

$$f(u) = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)}.$$

Cela étant, il est clair qu'on peut écrire, avec trois indéterminées A, B, C,

$$g(u) = \frac{A \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{B \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)} + C,$$

et nous tirerons sur-le-champ de ces expressions les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b},\\
G &= -A - B,\\
f_a &= -\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)},\\
g_a &= A,\\
g_a^1 &= -\frac{A \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{B \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + C.
\end{aligned}$$

Or la condition

$$g_a^1 = g_a(f_a - g_a)$$

conduit à

$$\frac{\operatorname{sn} b (A - B)}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} - A^2 - C = 0;$$

le second pôle $u = b$ donne semblablement

$$\frac{\operatorname{sn} a (B - A)}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} - B^2 - C = 0.$$

et l'on conclut enfin de l'équation $F + G = 0$

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + A + B = 0.$$

Je remarque immédiatement que cette dernière relation n'est point distincte des deux autres et qu'elle en résulte en les retranchant membre à membre et divisant par $A - B$. En l'employant avec la première, nous trouvons, par l'élimination de B,

$$A^2 - 2A \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} - \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(a-b)} + C = 0,$$

ou encore

$$\left[A - \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}\right]^2 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} + C = 0.$$

Remplaçant désormais C par $\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - C^2$, on voit qu'on aura

$$A = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + C,$$

et par conséquent

$$B = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b - a)} - C.$$

Telles sont donc, exprimées au moyen de la nouvelle indéterminée C, les valeurs très simples des constantes A et B pour lesquelles, d'après les principes de M. Füchs, l'intégrale complète de l'équation

$$y'' - \left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - b)}\right] y'$$
$$+ \left[\frac{A \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - a)} + \frac{B \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a - b)} - C^2\right] y = 0$$

est une fonction uniforme de la variable avec le seul pôle $u = 0$.

Nous sommes assurés de plus, par une proposition générale de M. Picard (*Comptes rendus* du 21 juillet 1879, p. 140, et du 19 janvier 1880, p. 128), que cette intégrale s'exprime dès lors par deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Si donc on restitue, en faisant la substitution $y = ze^{ax}$, une constante arbitraire dont il a été disposé pour simplifier les calculs, il est certain que la nouvelle équation différentielle contiendra, comme cas particuliers, toutes celles dont il a été précédemment question. C'est, en effet, ce que je ferai bientôt voir; mais je veux auparavant obtenir une confirmation de l'important théorème du jeune géomètre en effectuant directement l'intégration de cette équation et donner ainsi, avant d'aborder des cas plus généraux, un nouvel exemple du procédé déjà employé pour l'équation de Lamé dans le cas le plus simple de $n = 1$.

XXX.

Considérons la fonction doublement périodique de seconde espèce la plus générale, admettant pour seul pôle $u = 0$, à savoir

$$f(u) = \frac{H'(0)\Theta(u + \omega)}{H(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] u}$$

et proposons-nous de déterminer ω et λ de telle sorte qu'elle soit une solution de l'équation proposée. Soit, à cet effet, $\Phi(u)$ le résultat de la substitution de $f(u)$ dans son premier membre. Les coefficients de l'équation ayant pour périodes $2K$ et $2iK'$, on voit que cette quantité est une fonction de seconde espèce, ayant les mêmes multiplicateurs que $f(u)$, qui pourra, par conséquent, remplir à son égard le rôle d'élément simple. On voit aussi que les pôles de $\Phi(u)$ sont $u=a$, $u=b$, $u=0$, les deux premiers représentant des infinis simples et le troisième un infini triple. Nous aurons donc

$$\Phi(u)=\mathfrak{A}f(u-a)+\mathfrak{B}f(u-b)+\mathfrak{C}f(u)+\mathfrak{C}'f'(u)+\mathfrak{C}''f''(u),$$

et la condition $\Phi(u)=0$ entraîne ces cinq équations

$$\mathfrak{A}=0,\quad \mathfrak{B}=0,\quad \mathfrak{C}=0,\quad \mathfrak{C}'=0,\quad \mathfrak{C}''=0,$$

qu'il est aisé de former, comme on va voir.

Nous avons pour cela à décomposer en éléments simples les produits de $f(u)$ et $f'(u)$ par deux quantités de la même forme $\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-p)}$, c'est-à-dire à chercher les parties principales des développements de ces produits, d'abord suivant les puissances de u, puis, en posant $u=p+\varepsilon$, suivant les puissances de ε. Or il résulte de l'expression de $f(u)$ qu'on a

$$f(u)=\chi(i\mathrm{K}'+u)\,e^{\lambda u},$$

$\chi(u)$ désignant la fonction considérée au § V, p. 12, et par conséquent

$$\begin{aligned}f(u)&=\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\left(k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{1+k^2}{3}\right)u+\ldots\right]e^{\lambda u}\\&=\frac{1}{u}+\lambda+\frac{1}{2}\left(\lambda^2-k^2\operatorname{sn}^2\omega+\frac{1+k^2}{3}\right)u+\ldots.\end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}=-\frac{1}{u}-\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}-\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 p}-\frac{1+k^2}{2}\right)u+\ldots$$

et sans nouveau calcul, en remplaçant u par $-\varepsilon$,

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn}(p+\varepsilon)\operatorname{sn}\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}+\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 p}-\frac{1+k^2}{2}\right)\varepsilon+\ldots.$$

Ces développements nous donnent les formules

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}f(u)=f(p)f(u-p)-\left(\lambda+\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}\right)f(u)+f'(u),$$

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}f'(u)=f'(p)f(u-p)&-\frac{1}{2}\left(\lambda^2-k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{2}{\operatorname{sn}^2 p}+1+k^2\right)f(u)\\&-\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}f'(u)+\frac{1}{2}f''(u),\end{aligned}$$

et l'on en conclut, en faisant successivement $p = a$, $p = b$, les expressions cherchées

$$\mathfrak{A} = \mathrm{A}f(a) - f'(a),$$
$$\mathfrak{B} = \mathrm{B}f(b) - f'(b),$$
$$\mathfrak{C} = \lambda^2 - \mathrm{A}\left(\lambda + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right) - \mathrm{B}\left(\lambda + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right) - \mathrm{C}^2 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}$$
$$+ k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 b} + 1 + k^2,$$
$$\mathfrak{C}' = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b},$$
$$\mathfrak{C}'' = 0.$$

» Ces résultats obtenus, nous observons d'abord que $\mathfrak{C}'$ s'évanouit, d'après une des relations trouvées entre A et B; j'ajoute que l'équation $\mathfrak{C} = 0$ est une conséquence des deux premières; par conséquent, les cinq conditions se réduisent, comme il est nécessaire, à deux seulement qui serviront à déterminer ω et λ. Nous recourrons, pour l'établir, à la transformation suivante de la valeur de $\mathfrak{C}$. Soit, pour abréger l'écriture,

$$\mathrm{G} = \left(\lambda - \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right)\left(\lambda + \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right),$$
$$\mathrm{H} = \left(\mathrm{A} - \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right)\left(\mathrm{B} + \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right);$$

on a identiquement

$$\mathfrak{C} = \mathrm{G} - \mathrm{H} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})(\mathrm{B} + \mathrm{C}) - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} + 1 + k^2$$

et plus simplement déjà

$$\mathfrak{C} = \mathrm{G} - \mathrm{H} - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 b} + 1 + k^2,$$

les valeurs de A et B que je rappelle,

$$\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \mathrm{C}, \quad \mathrm{B} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} - \mathrm{C},$$

donnant

$$(\mathrm{A} - \mathrm{C})(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}.$$

Nous obtenons ensuite, en faisant usage de ces expressions,

$$\mathrm{H} = \left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right]\left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right]$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}\left(\frac{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 b}\right) + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}\left(\frac{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 b}\right)$$
$$= \left(\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}\right)\left(\frac{\operatorname{sn}^3 b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn}^3 a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}\right)$$
$$= -\frac{\operatorname{sn}^2 a + \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b} + 1 + k^2,$$

et la valeur de H qui en résulte, à savoir

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 b} + 1 + k^2,$$

donne cette nouvelle réduction :

$$\mathfrak{C} = \mathrm{G} - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}.$$

C'est maintenant qu'il est nécessaire d'introduire les conditions $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{A} = \frac{f'(a)}{f(a)}$, $\mathrm{B} = \frac{f'(b)}{f(b)}$. Or, au moyen des valeurs de A, de B et de l'expression

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\Theta'(x+\omega)}{\Theta(x+\omega)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \lambda,$$
$$= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(x+\omega) - \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} + \lambda,$$

on en tire

$$\lambda - \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega),$$
$$\lambda + \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega).$$

Cela étant, une réduction qui se présente facilement donne

$$\lambda - \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega),$$
$$\lambda + \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega),$$

et nous pouvons écrire en conséquence

$$\mathrm{G} = \left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega)\right]$$
$$\times \left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega)\right].$$

Je considérerai cette expression comme une fonction doublement périodique de ω, ayant pour infinis simples $\omega = i\mathrm{K}' - a$, $\omega = i\mathrm{K}' - b$ et pour infini double $\omega = i\mathrm{K}'$. Elle présente cette circonstance que les résidus qui correspondent aux infinis simples sont nuls. En effet, des deux facteurs dont elle se compose, le premier s'évanouit en faisant $\omega = i\mathrm{K}' - b$ et le second pour $\omega = i\mathrm{K}' - a$. Il en résulte que le résidu relatif au troisième pôle $\omega = i\mathrm{K}'$ est également nul, de sorte qu'en décomposant en éléments simples on obtient

$$\mathrm{G} = -\mathrm{D}_\omega \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \text{const.} = k^2 \operatorname{sn}^2\omega + \text{const.}$$

Posons, afin de déterminer la constante, $\omega = 0$; nous trouverons finalement

$$\mathrm{G} = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)},$$

et de là résulte, comme il importait essentiellement de le démontrer, que l'équation $\mathfrak{C} = 0$ est une conséquence des relations $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$.

XXXI.

La détermination des constantes ω et λ s'effectue au moyen des deux équations

$$\lambda - \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(a+\omega),$$

$$\lambda + \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b+\omega),$$

que nous avons maintenant à traiter. En les retranchant et après une réduction qui s'offre facilement, elles donnent d'abord

$$\begin{aligned} &k^2 \operatorname{sn}\omega[\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)] \\ &\qquad - 2\,\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b} - 2\mathrm{C} = 0, \end{aligned}$$

et nous démontrerons immédiatement, le premier membre étant une fonction doublement périodique, qu'on n'aura, dans le rectangle des périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, que deux valeurs pour l'inconnue. En effet, la fonction, qui au premier abord paraît avoir les trois pôles $\omega = i\mathrm{K}' - a$, $\omega = i\mathrm{K}' - b$, $\omega = i\mathrm{K}'$, ne possède en réalité que les deux premiers, le résidu relatif au troisième, qui est un infini simple, étant nul, comme on le vérifie aisément. Ce point établi, nous donnerons, pour éviter des longueurs de calcul, une autre forme à l'équation, en employant l'identité suivante,

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)\\ &\quad = \operatorname{sn}(b-a)\operatorname{sn}(a+b+\omega)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)],\end{aligned}$$

à laquelle je m'arrête un moment. Elle est la conséquence immédiate de la relation mémorable obtenue par Jacobi, dans un article intitulé *Formulæ novæ in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales* (*Journal de Crelle*, t. XV, p. 201), à savoir

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(u) + \mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(u+a+b)\\ &\quad = k^2 \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(a+b)[1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u+a+b)].\end{aligned}$$

Qu'on change en effet a en $-a$, puis u en $a+\omega$, on aura

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(a+\omega) - \mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(b+\omega)\\ &\quad = k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b-a)\operatorname{sn}(a+b+\omega)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)]\end{aligned}$$

et il suffit de remarquer que le premier membre, étant la différence des quantités $\mathrm{E}(a+\omega) - \mathrm{E}(a) - \mathrm{E}(\omega)$, $\mathrm{E}(b+\omega) - \mathrm{E}(b) - \mathrm{E}(\omega)$, peut être remplacé par $k^2 \operatorname{sn}\omega[\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)]$.

» On y parvient encore d'une autre manière au moyen de la relation précédemment démontrée,

$$\begin{aligned}\mathrm{G} = &\left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(a+\omega)\right]\\ &\times\left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b+\omega)\right] = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)},\end{aligned}$$

car on en tire

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b+\omega)\\ &\quad = \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b-a)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)],\end{aligned}$$

ce qui donne la formule proposée en changeant a en $-a$, b en $-b$ et ω en $\omega + a + b$.

Cela posé, soit $v = \omega + \frac{a+b}{2}$; faisons aussi, pour abréger, $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$; nous trouverons, par cette formule,

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn}\omega[\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(b+\omega)-\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(a+\omega)]\\ &\quad=-\operatorname{sn}2\beta\operatorname{sn}(v+\alpha)\operatorname{sn}(v-\alpha)\\ &\qquad\times[1-k^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(v+\beta)\operatorname{sn}(v-\beta)].\end{aligned}$$

Or on voit que le second membre devient ainsi une fonction rationnelle de $\operatorname{sn}^2 v$; on peut, en outre, supprimer au numérateur et au dénominateur le facteur $1 - k^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{sn}^2\alpha$, de sorte qu'il se réduit à l'expression

$$-\frac{\operatorname{sn}2\beta(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta)(\operatorname{sn}^2v-\operatorname{sn}^2\alpha)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{sn}^2\beta)}.$$

Remarquant encore que l'on a

$$\operatorname{sn}2\beta(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta)=2\operatorname{sn}\beta\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta,$$

nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$\mathrm{L}=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta}{k^2\operatorname{sn}\beta\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\left(\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}+\mathrm{C}\right),$$

et l'équation en $\operatorname{sn} v$ sera simplement

$$\frac{\operatorname{sn}^2v-\operatorname{sn}^2\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{sn}^2\beta}=-\mathrm{L}.$$

On en tire

$$\operatorname{sn}^2v=\frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\mathrm{L}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\mathrm{L}},\quad \operatorname{cn}^2v=\frac{\operatorname{cn}^2\alpha+\operatorname{dn}^2\beta\mathrm{L}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\mathrm{L}},\quad \operatorname{dn}^2v=\frac{\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\beta\mathrm{L}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\mathrm{L}},$$

et, si l'on fait

$$\mathfrak{L}=(\operatorname{sn}^2\alpha-\mathrm{L})(\operatorname{cn}^2\alpha+\operatorname{dn}^2\beta\mathrm{L})(\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\beta\mathrm{L})(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\mathrm{L}),$$

ces valeurs donnent

$$\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v=\frac{\sqrt{\mathfrak{L}}}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\mathrm{L})^2}.$$

Nous ferons usage de cette expression pour le calcul de λ, qui nous reste à déterminer. A cet effet je reprends, pour les ajouter membre à membre, les équations

$$\lambda-\mathrm{C}=\frac{\operatorname{sn}b}{\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(a-b)}+\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}a}+k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}\omega\operatorname{sn}(a+\omega),$$

$$\lambda+\mathrm{C}=\frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(b-a)}+\frac{\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}b}+k^2\operatorname{sn}b\operatorname{sn}\omega\operatorname{sn}(b+\omega),$$

et j'obtiens, comme on le voit facilement,

$$2\lambda = k^2[\operatorname{sn} a \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(a+\omega) + \operatorname{sn} b \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b+\omega)],$$

ou bien encore

$$2\lambda = k^2[\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\upsilon-\alpha)\operatorname{sn}(\upsilon+\beta) + \operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\upsilon-\alpha)\operatorname{sn}(\upsilon-\beta)].$$

Maintenant, un calcul sans difficulté donne en premier lieu l'expression

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha(\operatorname{sn}^2\upsilon - \operatorname{sn}^2\beta)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\upsilon \operatorname{sn}^2\alpha)(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)} + \frac{\operatorname{sn}\upsilon \operatorname{cn}\upsilon \operatorname{dn}\upsilon(\operatorname{sn}^2\beta - \operatorname{sn}^2\alpha)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\upsilon \operatorname{sn}^2\alpha)(1-k^2\operatorname{sn}^2\upsilon\operatorname{sn}^2\beta)};$$

on en conclut ensuite la valeur cherchée, à savoir

$$\begin{aligned}\lambda = {} & \frac{k^2\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha[\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta - (1-k^2\operatorname{sn}^4\beta)\mathrm{L}]}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)[1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta)\mathrm{L}]} \\ & + \frac{k^2(\operatorname{sn}^2\beta - \operatorname{sn}^2\alpha)\sqrt{\mathfrak{L}}}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)[1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta)\mathrm{L}]}.\end{aligned}$$

Cette expression devient illusoire lorsqu'on suppose d'abord $1 - k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta = 0$, c'est-à-dire $\alpha+\beta = a = i\mathrm{K}'$ ou bien $\alpha - \beta = b = i\mathrm{K}'$, puis en faisant

$$1 - k^2\operatorname{sn}^4\alpha + k^2(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta)\mathrm{L} = 0.$$

La première condition, ayant pour effet de rendre infinis les coefficients de l'équation différentielle, doit être écartée; mais la seconde appelle l'attention, et je m'y arrêterai un moment, afin d'obtenir la nouvelle forme analytique que prend l'intégrale dans ce cas singulier.

XXXII.

Remarquons en premier lieu que cette condition se trouve en posant

$$\operatorname{sn}^2\upsilon = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha - \mathrm{L}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\,\mathrm{L}} = \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2\alpha},$$

c'est-à-dire $\upsilon = \alpha + i\mathrm{K}'$, et donne par conséquent $\omega = i\mathrm{K}'$. Cela étant, je fais dans la solution de l'intégrale, qui est représentée par la formule $\frac{\Theta(u+\omega)}{\mathrm{H}(u)}e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}$, $\omega = i\mathrm{K}' + \varepsilon$, ε étant infiniment petit, et je développe suivant les puissances croissantes de ε la différence $\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}$. Or l'expression précédemment employée

$$2\lambda = k^2[\operatorname{sn}a \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(a+\omega) + \operatorname{sn}b \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b+\omega)]$$

donne facilement

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} - \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b} + \ldots;$$

nous avons d'ailleurs

$$\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \ldots,$$

et l'on en conclut, pour $\varepsilon = 0$, la limite finie

$$\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} - \frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} - \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b}.$$

Remplaçant donc $\Theta(u+i\mathrm{K}')$ par $i\mathrm{H}(u)e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')}$, on voit qu'au lieu de la fonction doublement périodique de seconde espèce nous obtenons l'exponentielle $e^{-\left(\frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} + \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b}\right)u}$, qui devient ainsi une des solutions de l'équation différentielle. Nous parvenons à l'autre solution en employant, au lieu de $v = \alpha + i\mathrm{K}'$, la valeur égale et de signe contraire $v = -\alpha - i\mathrm{K}'$, d'où l'on tire $\omega = -2\alpha - i\mathrm{K}' = -a - b - i\mathrm{K}'$, et par conséquent

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}^2 a + \operatorname{sn}^2 b}{2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}a \operatorname{sn}b}, \quad \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = -\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Des réductions qui s'offrent d'elles-mêmes en employant la formule

$$\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{sn}b}{\operatorname{sn}a \operatorname{sn}(a+b)} - \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}b}$$

donnent ensuite

$$\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} - \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b} + \frac{i\omega}{2\mathrm{K}}.$$

La seconde intégrale devient donc

$$\frac{\mathrm{H}(u-a-b)}{\mathrm{H}(a)} e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} - \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b}\right]u},$$

et l'on voit que, pour le cas singulier considéré, la solution générale est représentée par la relation suivante :

$$y e^{\left(\frac{\operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{2\operatorname{sn}a} + \frac{\operatorname{cn}b \operatorname{dn}b}{2\operatorname{sn}b}\right)u} = \mathrm{C} + \mathrm{C}' \frac{\mathrm{H}(u-a-b)}{\mathrm{H}(u)} e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)}\right]u}.$$

XXXIII.

Un dernier point me reste maintenant à traiter; j'ai encore à montrer comment les équations différentielles obtenues aux §§ XVII et XVIII se tirent comme cas particulier de l'équation que nous venons de considérer, ou plutôt de celle qui en résulte si l'on change u en $u + i\mathrm{K}'$, à savoir,

$$\begin{aligned} y'' &- [k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u-b)]\, y' \\ &+ \Big[\mathrm{A} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) \\ &\qquad + \mathrm{B} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u-b) + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2\Big] y = 0. \end{aligned}$$

Je me fonde, à cet effet, sur ce que les deux déterminations de la quantité $v = \omega + \dfrac{a+b}{2}$ peuvent être supposées égales et de signes contraires, de sorte que, en désignant par ω et ω' les valeurs correspondantes de ω, on a la condition $\omega + \omega' = -a - b$. Qu'on se reporte maintenant aux expressions données au § XXV, p. 69):

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\mathrm{C}\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}} + \frac{\mathrm{C}'\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}},$$

$$\mathrm{X}_2 = \frac{\mathrm{C}\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{1-s}} + \frac{\mathrm{C}'\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{1-s}},$$

$$\mathrm{X}_3 = \frac{\mathrm{C}\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{2+s}} + \frac{\mathrm{C}'\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{2+s}}.$$

On voit aisément que les quantités qui jouent le rôle des constantes ω et ω' ont pour somme, successivement, $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$, K. C'est, en effet, la conséquence des relations déjà remarquées :

$$\theta_s(u + i\mathrm{K}') = \sigma\theta_{1-s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')},$$

$$\theta_s(u + \mathrm{K}) = \sigma'\theta_{3-s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')},$$

$$\theta_s(u + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \sigma''\theta_{2+s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')}.$$

D'après cela, je ferai successivement $a + b = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$, K; je poserai en outre, en changeant d'inconnue dans ces divers cas,

$$y = ze^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \mathrm{cn}\, a}, \quad ze^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \mathrm{sn}\, a}, \quad ze^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \mathrm{dn}\, a}.$$

Or, en considérant, pour abréger, seulement le premier de ces cas, voici le calcul et le résultat auquel il conduit. La condition supposée $b = \mathrm{K} + i\mathrm{K}' - a$ donne d'abord

$$\mathrm{sn}\, b = \frac{\mathrm{dn}\, a}{k\, \mathrm{cn}\, a}, \quad \mathrm{sn}(u-b) = -\frac{\mathrm{dn}(u+a)}{k\, \mathrm{cn}(u+a)}, \quad \mathrm{sn}(a-b) = -\frac{\mathrm{dn}\, 2a}{k\, \mathrm{cn}\, 2a},$$

et nous obtenons, pour la transformée en z, l'équation suivante,

$$\begin{aligned} z'' &- \left[k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}(u-a) - \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{dn}(u+a)}{\mathrm{cn}\, a\, \mathrm{cn}(u+a)} - \frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{\mathrm{cn}\, a}\right] z' \\ &+ \left[\mathrm{P}k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}(u-a) - \mathrm{Q}\frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{dn}(u+a)}{\mathrm{cn}\, a\, \mathrm{cn}(u+a)} + \mathrm{R}\right] z = 0, \end{aligned}$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{2\, \mathrm{cn}\, a}, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{B} - \frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{2\, \mathrm{cn}\, a}, \quad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{dn}^2 a}{4\, \mathrm{cn}^2 a} + \frac{k^2 \mathrm{cn}^2 2a}{\mathrm{dn}^2 2a} - \mathrm{C}^2.$$

Soit maintenant

$$\mathfrak{P} = \mathrm{cn}(u+a)(1 - k^2\, \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 a) = \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{cn}\, u - \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u,$$

on trouvera d'abord que le coefficient de z' est simplement $\mathrm{D}_u \log \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}$.

Représentons ensuite par $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}}$ le coefficient de z; au moyen de la formule élémentaire

$$\mathrm{sn}(u-a)\, \mathrm{cn}(u+a) = \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, a - \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{cn}\, a}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 a},$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = {} & \mathrm{P}k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, (\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, a - \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{cn}\, a) \\ & - \mathrm{Q}\frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{\mathrm{cn}\, a}(\mathrm{dn}\, u\, \mathrm{dn}\, a - k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{cn}\, a) \\ & + \mathrm{R}(\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{cn}\, a - \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a), \end{aligned}$$

ou bien, en réunissant les termes semblables,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = {} & (\mathrm{P} + \mathrm{Q})k^2\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{cn}\, u \\ & - \left(\mathrm{P}k^2\, \mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{cn}\, a + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{cn}\, a} + \mathrm{R}\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a\right) \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u + \mathrm{R}\, \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{cn}\, u. \end{aligned}$$

Soit maintenant $C = \delta - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{2 \operatorname{cn} a}$, cette nouvelle forme de la constante donnera, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} \Phi = &- k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \\ &+ \left[\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a\, \delta^2 + \operatorname{cn} a (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a)\delta + k^2 \operatorname{sn}^3 a \operatorname{dn} a - \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 2a}{\operatorname{dn}^2 2a} \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a\right] \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ &- \left[\operatorname{cn} a\, \delta^2 - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a\, \delta - \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 2a}{\operatorname{dn}^2 2a} \operatorname{cn} a\right] \operatorname{cn} u. \end{aligned}$$

Or, en faisant successivement $a = 0$, puis $a = k$, on tire de là les équations

$$\operatorname{cn} u\, z'' - D_u \operatorname{cn} u\, z' - [k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, \delta + (\delta^2 - k^2) \operatorname{cn} u]\, z = 0,$$
$$\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, z'' - D_u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, z' - [\operatorname{cn} u\, \delta + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, \delta^2]\, z = 0;$$

ce sont précisément les relations en X_1 et Y_1 des §§ XXV et XXVI, en supposant dans la première $\delta = \delta_1$ et dans la seconde $\delta = -\delta_1$.

XXXIV.

Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce avec un pôle simple, qu'on pourrait nommer *unipolaires*, donnent, comme nous l'avons vu, la solution découverte par Jacobi du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a point de forces accélératrices. Ces mêmes quantités s'offrent encore dans une autre question mécanique importante, la recherche de la figure d'équilibre d'un ressort soumis à des forces quelconques, que je vais traiter succinctement. On sait que Binet a réussi le premier à ramener aux quadratures l'expression des coordonnées de l'élastique, dans le cas le plus général où la courbe est à double courbure (*Comptes rendus*, t. XVIII, p. 1115, et t. XIX, p. 1). Son analyse et ses résultats ont été immédiatement beaucoup simplifiés par Wantzel [1], et j'adopterai la marche de l'éminent géomètre en me propo-

---

[1] Wantzel, enlevé à la Science par une mort prématurée à l'âge de trente-sept ans, en 1849, a laissé d'excellents travaux, parmi lesquels un Mémoire extrêmement remarquable sur les nombres incommensurables, publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (t. XV, p. 151), et une Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure (*Comptes rendus*, t. XVIII, p. 1197).

sant de conduire la question à son terme et d'obtenir explicitement les coordonnées de la courbe en fonction de l'arc. Mais d'abord je crois devoir considérer le cas particulier où l'élastique est supposée plane et où l'on a, en désignant l'arc par s (*Mécanique* de Poisson, t. I, p. 598),

$$ds = \frac{2c^2\,dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}, \quad dy = \frac{(2ax - x^2)\,dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}.$$

Soit alors

$$x = a - \sqrt{2c^2 + a^2}\sqrt{1 - X^2}, \quad k^2 = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4c^2},$$

on obtient facilement

$$ds = \frac{c\,dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2X^2)}},$$

de sorte qu'on peut prendre $X = \operatorname{sn}\left(\frac{s - s_0}{c}\right)$, s_0 étant une constante arbitraire. Mais il est préférable de faire $X = \operatorname{sn}\left(\frac{s - s_0}{c} + K\right)$; nous parviendrons ainsi à des expressions mieux appropriées au cas important qui a été considéré par Poisson, où c est supposé une ligne dont la longueur est très grande par rapport à a, s et x. En premier lieu, les formules

$$\operatorname{cn}(z + K) = -k' \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, \quad k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4c^2}$$

donnent, pour l'abscisse,

$$x = a + \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{s - s_0}{c}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{s - s_0}{c}\right)}.$$

La valeur de l'ordonnée, à savoir

$$2c^2y = \int (2ax - x^2)\,ds = \int \left[a^2 - (2c^2 + a^2)\operatorname{cn}^2\left(\frac{s - s_0}{c} + K\right)\right] ds,$$

s'obtient ensuite immédiatement en employant la relation

$$\int_0^z k^2 cn^2(z + K)\,dz = k'^2 z + D_z \log \operatorname{Al}(z)_3.$$

Or ces formules conduisent comme il suit aux développements de x et y suivant les puissances décroissantes de c. J'emploie à cet effet la série

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z} = z + \frac{k^2 - k'^2}{6} z^3 + \frac{1 - 16k^2k'^2}{120} z^5 + \ldots,$$

et je remarque qu'en désignant par $F_n(k)$ le coefficient de z^{2n+1}, qui est un polynôme de degré n en k^2, on a la relation suivante :

$$F_n(k') = (-1)^n F_n(k).$$

Nous en concluons facilement pour n pair l'expression

$$F_n(k) = \alpha_0 + \alpha_1 (kk')^2 + \alpha_2 (kk')^4 + \ldots + \alpha_{\frac{1}{2}n} (kk')^n,$$

et pour n impair,

$$F_n(k) = (k^2 - k'^2)\left[\beta_0 + \beta_1 (kk')^2 + \ldots + \beta_{\frac{n-1}{2}} (kk')^{n-1}\right].$$

Cela étant, les formules

$$k^2 k'^2 = \frac{1}{4} - \frac{a^4}{16c^4} \quad \text{et} \quad k^2 - k'^2 = \frac{a^2}{2c^2}$$

montrent que le terme général $F_n(k) z^{2n+1}$, qui est de l'ordre $\frac{1}{c^{2n+1}}$, lorsqu'on remplace z par $\frac{s-s_0}{c}$, devient, si l'on suppose n impair, de l'ordre $\frac{1}{c^{2n+3}}$. Nous pourrons donc écrire, en négligeant $\frac{1}{c^6}$ dans la parenthèse,

$$x = a + \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c^2}\left[s - c + \frac{a^2(s-c)^3}{12c^4} - \frac{(s-c)^5}{40c^4}\right].$$

Remplaçons enfin le facteur $\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c^2}$ par $1 - \frac{a^4}{8c^4}$, et prenons $s_0 = a$; il viendra, avec le même ordre d'approximation,

$$x = s - \frac{s-a}{120c^4}[3(s-a)^4 - 10a^2(s-a)^2 + 15a^4].$$

Le développement de $c^2 y$ résulte ensuite de l'équation

$$\int_0^z k^2 \operatorname{cn}^2(z + K)\,dz = \frac{k^2 k'^2}{3} z^3 + \frac{k^2 k'^2(k^2 - k'^2)}{3.5} z^5 + \frac{k^2 k'^2(2 - 17k^2 k'^2)}{3.5.7} z^7 + \cdots;$$

mettant $\frac{s-a}{c}$ au lieu de z et déterminant la constante amenée par l'intégration de manière qu'on ait $y = 0$ pour $s = a$, on en tire, par un calcul facile,

$$2c^2 y = as^2 - s^3 + \frac{(s-a)^3}{420c^4}[9(s-a)^4 - 14a^2(s-a)^2 + 140a^4].$$

Le second membre, dans cette expression de l'ordonnée, est exact aux termes près de l'ordre $\frac{1}{c^6}$, comme la valeur trouvée pour l'abscisse.

XXXV.

Les équations différentielles de l'élastique, dans le cas le plus général où la courbe est à double courbure, se ramènent par un choix convenable de coordonnées, comme l'a remarqué Wantzel, à la forme suivante,

$$\begin{aligned} y'z'' - y''z' &= \alpha x' + \beta y, \\ z'x'' - z''x' &= \alpha y' - \beta x, \\ x'y'' - x''y' &= \alpha z' + \gamma, \end{aligned}$$

où x', y', z', x'', y'', z'' désignent les dérivées par rapport à l'arc s de x, y, z et α, β, γ des constantes dont les deux premières sont essentiellement positives.

Cela étant, j'observerai en premier lieu que, si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement, d'abord par x', y', z', puis par x'', y'', z'', on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \beta(x'y - xy') + \gamma z' &= 0, \\ \alpha(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \beta(x''y - xy'') + \gamma z'' &= 0. \end{aligned}$$

Or la première de ces relations donne, par la différentiation,

$$2\alpha(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \beta(x''y - xy'') + \gamma z'' = 0;$$

nous avons donc

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

d'où

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \text{const.},$$

et l'on voit que, en prenant la constante égale à l'unité, on satisfera à la condition que l'arc s soit, comme on l'a admis, la variable indépendante.

Cela posé, et après avoir écrit les équations précédentes de cette manière,

$$\beta(xy' - x'y) = \gamma z' + \alpha, \quad \beta(xy'' - x''y) = \gamma z'',$$

j'en déduis

$$\beta[(xy' - x'y)z'' - (xy'' - x''y)z'] = \alpha z'';$$

mais le premier membre, étant écrit ainsi,

$$\beta[(y'z'' - y''z')x + (z'x'' - z''x')y],$$

se réduit à

$$\beta[(\alpha x' + \beta y)x + (\alpha y' - \beta x)y] = \alpha\beta(xx' + yy'),$$

de sorte que nous avons

$$\beta(xx' + yy') = z'',$$

puis par l'intégration, en désignant par δ une constante arbitraire,

$$\beta(x^2 + y^2) = 2(z' - \delta).$$

Soit maintenant $z' = \zeta$; nous remplacerons le système des équations à intégrer par celles-ci :

$$\begin{gathered}\beta(x^2 + y^2) = 2(\zeta - \delta),\\ \beta(xx' + yy') = \zeta',\\ x'^2 + y'^2 = 1 - \zeta^2,\\ \beta(xy' - x'y) = \gamma\zeta + \alpha.\end{gathered}$$

Or l'identité

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2$$

donne en premier lieu

$$\zeta'^2 = 2\beta(\zeta - \delta)(1 - \zeta^2) - (\gamma\zeta + \alpha)^2,$$

et l'on trouve ensuite facilement

$$\frac{x' + iy'}{x + iy} = \frac{\zeta' + i(\gamma\zeta + \alpha)}{2(\zeta - \delta)};$$

ces résultats obtenus, les expressions des coordonnées en fonction de l'arc s'en déduisent comme il suit.

Soient a, b, c les racines de l'équation

$$2\beta(\zeta - \delta)(1 - \zeta^2) - (\gamma\zeta + \alpha)^2 = 0,$$

de sorte qu'on ait

$$\zeta'^2 = -2\beta(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - c).$$

Désignons aussi par ζ_0 une des valeurs de ζ, qu'on doit, d'après la condition $x'^2 + y'^2 + \zeta^2 = 1$, supposer comprise entre $+1$ et -1. Le facteur β étant positif, comme nous l'avons dit, le polynôme $2\beta(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - c)$ sera négatif en faisant $\zeta = \zeta_0$. Mais il prend pour $\zeta = +1$ et $\zeta = -1$ les valeurs positives $(\gamma + \alpha)^2$ et $(\gamma - \alpha)^2$; par conséquent, les racines a, b, c sont réelles, et, si on les suppose rangées par ordre décroissant de grandeur, a sera compris entre $+1$ et ζ_0, b entre ζ_0 et -1, et c entre -1 et $-\infty$. Remarquons aussi que, ayant pour $z = \zeta$ un résultat positif, il est nécessaire que cette constante δ soit supérieure à a ou comprise entre b et c. Mais la relation $x^2 + y^2 = 2(\zeta - \delta)$ montre que la seconde hypothèse est seule possible, car dans la première x^2+y^2 serait négatif. Cela posé, puisque ζ a pour limites a et b, nous ferons

$$\zeta = a-(a-b)\mathrm{U}^2;$$

soit encore

$$k^2=\frac{a-b}{a-c},\quad k'^2=\frac{b-c}{a-c},$$

on aura

$$(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c) = -(a-b)^2(a-c)\mathrm{U}^2(1-\mathrm{U}^2)(1-k^2\mathrm{U}^2),$$

et de l'équation

$$\zeta'^2 = -2\beta(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-b)$$

nous conclurons

$$\mathrm{U}'^2 = \frac{(a-c)\beta}{2}(1-\mathrm{U}^2)(1-k^2\mathrm{U}^2).$$

Faisons donc $n=\sqrt{\frac{(a-c)\beta}{2}}$; puis, en désignant par s_0 une constante $u=n(s-s_0)$, on aura

$$\mathrm{U}=\operatorname{sn} u,\quad \zeta = a-(a-b)\operatorname{sn}^2 u,$$

et par conséquent

$$n(z-z_0)=\int_0^u \zeta\,du = \left[a-(a-c)\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]u+(a-c)\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

z_0 étant la valeur arbitraire de z pour $u=0$.

Considérons, pour obtenir la valeur de $x+iy$, l'expression $\frac{\zeta'+i(\gamma\zeta+\alpha)}{2(\zeta-\delta)}$, qui en représente la dérivée logarithmique. C'est une fonction doublement périodique de la variable u, ayant pour pôles, d'une part $u=i\mathrm{K}'$ et de l'autre les racines de l'équation $\zeta-\delta=0$. Mais des deux solutions $u=\pm\omega$ qu'on en tire, une seule est en effet un pôle, comme le montre la relation $\zeta'^2+(\gamma\zeta+\alpha)^2=2\beta(\zeta-\delta)(1-\zeta^2)$, d'où l'on déduit

$$\zeta'=\pm i(\gamma\delta+\alpha),$$

en faisant $\zeta=\delta$. Il en résulte que, si nous prenons pour $u=\omega$ la valeur $\zeta'=+i(\gamma\delta+\alpha)$, on aura $\zeta'=-i(\gamma\delta+\alpha)$ pour $u=-\omega$, la dérivée changeant de signe avec la variable. En même temps on voit que le résidu de la fonction qui correspond au pôle $u=\omega$ est $+n$; le résidu relatif à l'autre pôle $u=i\mathrm{K}'$ est donc $-n$ et, par la décomposition en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{\zeta'+i(\gamma\zeta+\alpha)}{2(\zeta-\delta)}=\frac{1}{n}\left[\lambda-\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+\frac{\mathrm{H}'(u-\omega)}{\mathrm{H}(u-\omega)}\right].$$

La constante λ se détermine en supposant $u = 0$ ou $\zeta = a$, ce qui donne immédiatement

$$\lambda = \frac{in(a\gamma + \alpha)}{a - \delta} + \frac{H'(\omega)}{H(\omega)},$$

et l'expression cherchée se conclut de la relation

$$D_s \log(x + iy) = \frac{1}{n} D_u \log(x + iy) = \frac{1}{n}\left[\lambda - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{H'(u-\omega)}{H(u-\omega)}\right]$$

au moyen d'une fonction doublement périodique de seconde espèce :

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)H(\omega - u)e^{\lambda u}}{\Theta(u)H(\omega)}.$$

Dans cette formule, x_0 et y_0 désignent les valeurs que prennent x et y pour $u = 0$; elles sont liées par l'équation

$$\beta(x_0^2 + y_0^2) = 2(a - \delta)$$

et ne contiennent, par conséquent, qu'une seule indéterminée. En y joignant les constantes z_0, s_0 et δ, on a donc quatre quantités arbitraires dans l'expression générale des coordonnées de l'élastique. A l'égard de δ, nous avons vu que sa valeur doit rester comprise entre b et c; de là résulte que $\operatorname{sn}^2\omega$, déterminé par la formule $\operatorname{sn}^2\omega = \frac{a-\delta}{a-b}$, a pour limites 1 et $\frac{1}{k^2}$. On peut écrire par suite $\omega = K + i\upsilon$, υ étant réel, et poser

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)H_1(i\upsilon - u)e^{\lambda u}}{\Theta(u)H_1(i\upsilon)}.$$

Changeons i en $-i$, ce qui change λ en $-\lambda$, on aura

$$x - iy = (x_0 - iy_0)\frac{\Theta(0)H_1(i\upsilon + u)e^{-\lambda u}}{\Theta(u)H_1(i\upsilon)},$$

et ces relations, jointes à celle qui a été précédemment obtenue, à savoir :

$$n(z - z_0) = \left[a - (a - c)\frac{J}{K}\right]u + (a - c)\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

donnent la solution complète de la question proposée.

XXXVI.

Les expressions des rayons de courbure et de torsion, R et r, se calculent facilement, sans qu'il soit besoin d'employer les valeurs des coordonnées, et comme conséquence immédiate des équations différentielles

$$y'z''-y''z'=\alpha x'+\beta y,$$
$$z'x''-z''x'=\alpha y'-\beta x,$$
$$x'y''-x''y'=\alpha z'+\gamma.$$

On trouve, en effet, après les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes,

$$\frac{1}{R^2}=(\alpha x'+\beta y)^2+(\alpha y'-\beta x)^2+(\alpha z'+\gamma)^2$$
$$=2\beta(\zeta-\delta)+\gamma^2-\alpha^2=2\beta[a-\delta-(a-b)\,\mathrm{sn}^2 u]+\gamma^2-\alpha^2,$$

puis

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}=\alpha\beta(\zeta-\delta)-\beta(\alpha\delta+\gamma)+\alpha(\gamma^2-\alpha^2),$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha\beta(\zeta-\delta)-\beta(\alpha\delta+\gamma)+\alpha(\gamma^2-\alpha^2)}{2\beta(\zeta-\delta)+\gamma^2-\alpha^2}.$$

Cette expression du rayon de torsion conduit naturellement à envisager le cas particulier où elle devient indépendante de ζ et a la valeur constante $r=\frac{2}{\alpha}$. La condition à remplir à cet effet étant

$$2\beta(\alpha\delta+\gamma)-\alpha(\gamma^2-\alpha^2)=0,$$

je remarque que, en remplaçant l'indéterminée ζ par $-\frac{\gamma}{\alpha}$, dans l'égalité

$$2\beta(\zeta-\delta)(1-\zeta^2)-(\gamma\zeta+\alpha)^2=-2\beta(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c),$$

le résultat peut s'écrire ainsi :

$$(\gamma^2-\alpha^2)[2\beta(\alpha\delta+\gamma)-\alpha(\gamma^2-\alpha^2)]=2\beta(\gamma+a\alpha)(\gamma+b\alpha)(\gamma+c\alpha),$$

par où l'on voit que l'une des racines a, b, c est alors égale à $-\frac{\gamma}{\alpha}$. Mais notre condition donne

$$\delta+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}=-\frac{\gamma}{\alpha};$$

ainsi l'on doit poser

$$\delta + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\beta} = a,\, b \text{ ou } c,$$

et voici la conséquence remarquable qui résulte de là. Nous avons trouvé tout à l'heure

$$\frac{1}{R^2} = 2\beta[a - \delta - (a - b)\operatorname{sn}^2 u] + \gamma^2 - \alpha^2,$$

ou plutôt

$$\frac{1}{R^2} = 2\beta\left(a - \delta - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\beta}\right) - 2\beta(a - b)\operatorname{sn}^2 u;$$

or cette expression montre que le premier cas, où l'on suppose

$$\delta + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\beta} = a,$$

doit être rejeté, comme conduisant à une valeur négative pour R^2. Mais les deux autres peuvent avoir lieu et donnent successivement, en employant la valeur du module $k^2 = \dfrac{a - b}{a - c}$,

$$\frac{1}{R^2} = 2\beta(a - b)\operatorname{cn}^2 u,$$

$$\frac{1}{R^2} = 2\beta(a - c)\operatorname{dn}^2 u.$$

Le rayon de courbure devient donc, comme les coordonnées elles-mêmes, une fonction uniforme de l'arc, en même temps que le rayon de torsion prend une valeur constante. Ces circonstances remarquables me semblent appeler l'attention sur la courbe qui les présente, mais ce serait trop m'étendre d'essayer d'en suivre les conséquences et je reviens à mon objet principal, en donnant une dernière remarque sur la formation des équations linéaires d'ordre quelconque dont les intégrales sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, unipolaires (¹).

(¹) On doit à M. de Saint-Venant un travail important sur les flexions considérables des verges élastiques, que l'éminent géomètre a publié dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (t. IX, 1844), et auquel je dois renvoyer; je citerai aussi, sur la même question, un Mémoire récemment publié par M. Adolph Steen, sous le titre : *Der elastike Kurve, og dens anvendelse i böjningstheorien.* Copenhague, 1879.

XXXVII.

Soit, comme au § XXX (p. 79), $f(u)=\frac{H'(o)\Theta(u+\omega)}{H(u)\Theta(\omega)}e^{\left[\lambda-\frac{\Theta'\omega}{\Theta\omega}\right]u}$; désignons par $f_i(u)$ ce que devient cette fonction quand on y remplace les quantités ω, λ par ω_i, λ_i, nommons enfin μ_i et μ'_i ses multiplicateurs. Si l'on pose

$$y=C_1f_1(u)+C_2f_2(u)+\ldots+C_nf_n(u),$$

l'équation différentielle linéaire d'ordre n, admettant cette expression analytique pour intégrale, se présente sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} y & f_1(u) & f_2(u) & \ldots & f_n(u) \\ y' & f'_1(u) & f'_2(u) & \ldots & f'_n(u) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^n & f^n_1(u) & f^n_2(u) & \ldots & f^n_n(u) \end{vmatrix}=0.$$

D'après cela, j'observe que, le déterminant étant mis sous la forme

$$\Phi_0(u)y^n+\Phi_1(u)y^{n-1}+\ldots+\Phi_n(u)y,$$

les coefficients $\Phi_i(u)$ sont des fonctions de seconde espèce, aux multiplicateurs $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$, $\mu'_1\mu'_2\ldots\mu'_n$, ayant le pôle $u=0$, avec l'ordre de multiplicité $n+1$, sauf le premier $\Phi_0(u)$, où l'ordre de multiplicité est n. C'est ce que l'on voit immédiatement en retranchant la seconde colonne du déterminant de celles qui suivent, attendu que les différences $f_2(u)-f_1(u)$, $f_3(u)-f_1(u)$, ..., ainsi que leurs dérivées, ne sont plus infinies pour $u=0$. Nous pouvons donc poser, comme je l'ai fait voir ailleurs (*Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé*, dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXXXIX, p. 10),

$$\Phi_0(u)=\frac{G_0H(u-a_1)H(u-a_2)\ldots H(u-a_n)e^{g_0u}}{H^n(u)},$$

les quantités G_0, g_0, a_i étant des constantes, puis d'une manière semblable, pour les coefficients suivants :

$$\Phi_i(u)=\frac{G_iH(u-a^i_1)H(u-a^i_2)\ldots H(u-a^i_{n+1})e^{g_iu}}{H^{n+1}(u)}.$$

Il en résulte qu'en décomposant en éléments simples les quotients $\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(u)}$, qui sont des fonctions doublement périodiques de première espèce, on aura

$$\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(u)} = \text{const.} + \frac{A_1 H'(u-a_1)}{H(u-a_1)} + \frac{A_2 H'(u-a_2)}{H(u-a_2)} + \ldots + \frac{A_n H'(u-a_n)}{H(u-a_n)} + \frac{A_0 H'(u)}{H(u)},$$

avec la condition

$$A_0 = -(A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

C'est donc la généralisation du résultat trouvé au § XXI (p. 106) pour les équations du second ordre, et il est clair qu'on peut encore écrire

$$\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(a)} = \text{const.} + \frac{A_1 \operatorname{sn} a_1}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a_1)} + \frac{A_2 \operatorname{sn} a_2}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a_2)} + \cdots + \frac{A_n \operatorname{sn} a_n}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a_n)}.$$

La détermination des constantes $A_1, A_2, \ldots$, qui entrent dans ces expressions des coefficients de l'équation linéaire, par la condition que les solutions soient des fonctions uniformes, est une question difficile et importante, que je n'ai pas abordée au delà du cas le plus simple de $n = 2$; je me borne à donner la forme analytique générale de ces coefficients et à observer que, chacune des fonctions $f_i(u)$ contenant deux arbitraires, l'équation différentielle en renferme en tout $2n$. Les remarques que j'ai à présenter ont un autre objet, comme on va le voir. Je me suis attaché à cette circonstance que présente l'équation de Lamé, $y'' = (2k^2 \operatorname{sn}^2 u + h)y$, de ne contenir aucun point à apparence singulière; elle m'a paru donner l'indication d'un type spécial, à distinguer et à caractériser, de manière qu'on ait ses analogues, si je puis dire, pour un ordre quelconque. Introduisons donc la condition $\Phi_0(u) = \text{const.}$ pour amener la disparition des points à apparence singulière $u = a_1, a_2, \ldots, a_n$, et posons, à cet effet, les $n+1$ conditions

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0, \quad g_0 = 0.$$

» J'observerai, en premier lieu, que, dans ce type particulier d'équations, le nombre des arbitraires se trouve réduit à $2n - (n+1)$, c'est-à-dire à $n - 1$. Je remarque ensuite que, les fonctions $\Phi_i(u)$ ayant toutes les mêmes multiplicateurs, ces multiplicateurs seront nécessairement l'unité, puisque l'une d'elles, $\Phi_0(u)$, est une constante. C'est dire qu'elles deviennent des fonctions doublement périodiques de première espèce, ayant pour pôle unique $u = 0$, avec l'ordre de multiplicité maximum $n + 1$. Nous avons, par conséquent, l'expression

$$\Phi_i(u) = a + b\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + c D_u \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + \ldots + h D_u^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

que la considération suivante va nous permettre encore de simplifier.

Et, d'abord, il résulte des expressions de $\Phi_0(u)$ et $\Phi_1(u)$, sous forme de déterminants, qu'on a, en général,

$$\Phi_1(u) = - D_u \Phi_0(u).$$

La condition $\Phi_0(u) = \text{const.}$ donne donc

$$\Phi_1(u) = 0,$$

et l'on voit que l'équation d'ordre n, analogue à celle de Lamé, a la forme

$$y^n + \Phi_2(u) y^{n-2} + \ldots + \Phi_n(u) y = 0.$$

Je ferai maintenant un nouveau pas en appliquant l'un des beaux théorèmes donnés par M. Fuchs, à savoir que le point singulier effectif $u = 0$ doit être, dans le coefficient $\Phi_i(u)$, un pôle dont l'ordre de multiplicité ne dépasse pas i, pour que l'intégrale de l'équation différentielle soit une fonction uniforme de la variable. On a, en conséquence, les expressions suivantes des coefficients, en remplaçant u par $u + iK'$, afin de nous rapprocher autant que possible de l'équation de Lamé :

$$\begin{aligned}
\Phi_2(u) &= \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn}^2 u, \\
\Phi_3(u) &= \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 u + \beta_2 D_u \operatorname{sn}^2 u, \\
\Phi_4(u) &= \gamma_0 + \gamma_1 \operatorname{sn}^2 u + \gamma_2 D_u \operatorname{sn}^2 u + \gamma_3 D_u^2 \operatorname{sn}^2 u, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La question de déterminer les constantes α_0, α_1, ..., de manière à réaliser complètement la condition que l'intégrale soit une fonction uniforme, offre, comme on le voit, beaucoup d'intérêt. Elle a fait le sujet des recherches d'un jeune géomètre du talent le plus distingué, M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université d'Helsingfors, et je vais exposer les résultats auxquels il est parvenu.

XXXVIII.

Considérons en premier lieu les équations du troisième ordre, que nous savons devoir contenir deux constantes arbitraires. Elles présentent deux types distincts, et l'un d'eux, découvert antérieurement par M. Picard, a offert le premier et mémorable exemple de l'intégration au moyen des fonctions elliptiques d'une équation différentielle d'ordre supérieur au second [1]. C'est l'équation

$$y''' + (\alpha - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u) y' + \beta y = 0,$$

à laquelle on satisfait de la manière suivante.

Soit

$$y = \frac{H(u+\omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] u},$$

et posons, comme au § V (p. 13)

$$\begin{aligned}
\Omega &= k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1+k^2}{3},\\
\Omega_1 &= k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega,\\
\Omega_2 &= k^2 \operatorname{sn}^4 \omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3} \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{45},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

de sorte que l'on ait, pour $u = iK' + \varepsilon$,

$$y = Ce^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \ldots\right),$$

C désignant un facteur constant. Les quantités ω et λ se déterminent au moyen des relations

$$\begin{aligned}
3(\lambda^2 - \Omega) + \alpha - 2(1+k^2) &= 0,\\
2\lambda^3 - 6\lambda\Omega - 4\Omega_1 - \beta &= 0.
\end{aligned}$$

et il a été démontré par M. Picard qu'elles admettent trois systèmes de solutions, d'où se tirent trois intégrales particulières et par conséquent l'intégrale complète de l'équation considérée.

Le second type qu'il faut joindre au précédent pour avoir, dans le troisième ordre, toutes les équations analogues à celle de Lamé, est

$$y''' + (\alpha - 3k^2 \operatorname{sn}^2 u) y' + (\beta + \gamma k^2 \operatorname{sn}^2 u - 3k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u) y = 0,$$

avec la condition

$$3(\alpha - 1 - k^2) + \gamma^2 = 0.$$

Il présente cette circonstance bien remarquable que, dans les trois intégrales particulières, la constante λ a la même valeur, à savoir : $\lambda = -\frac{\gamma}{3}$.

---

(1) *Sur une classe d'équations différentielles* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 128).

Cela étant, ω s'obtient par la relation

$$2\lambda^3 - \lambda(3\Omega - 1 - k^2) - \Omega_1 - \beta = 0.$$

En passant maintenant au quatrième ordre, on obtient quatre équations A, B, C, D avec trois constantes arbitraires, et pour chacune d'elles les constantes ω et λ se déterminent ainsi que je vais l'indiquer.

A.

$$y^{\text{IV}} + (\alpha - 12k^2 \operatorname{sn}^2 u)y'' + \beta y' + (\gamma + \delta k^2 \operatorname{sn}^2 u)y = 0,$$

avec la condition

$$2\alpha - 8(1 + k^2) + \delta = 0.$$

Les relations entre ω et λ sont

$$\begin{gathered}4\lambda^3 - \lambda(12\Omega + \delta) - 8\Omega_1 + \beta = 0,\\ 18\lambda^4 - 3\lambda^2(36\Omega + \gamma) - 144\lambda\Omega_1 - 54\Omega_2 - 3\delta\Omega \\ - 6\gamma - 2\delta(1 + k^2) + 16(1 - k^2 + k^4) = 0.\end{gathered}$$

B.

$$\begin{aligned}y^{\text{IV}} &+ (\alpha - 8k^2 \operatorname{sn}^2 u)y'' + (\beta + \gamma k^2 \operatorname{sn}^2 u - 8k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)y' \\ &+ (\delta + \varepsilon k^2 \operatorname{sn}^2 u - \gamma k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)y = 0,\end{aligned}$$

sous les conditions

$$4\varepsilon = \gamma^2, \quad \gamma^3 + 8\gamma(\alpha - 2 - 2k^2) + 16\beta = 0.$$

On a ensuite

$$\begin{gathered}48(\lambda^2 - \Omega) + 12\lambda\gamma + 24\alpha + 3\gamma^2 - 64(1 + k^2) = 0,\\ 120\lambda^4 - 720\lambda^2\Omega - 960\lambda\Omega_1 - 360\Omega_2 - 60(\lambda^3 - 3\lambda\Omega - 2\Omega_1)\gamma \\ - 15(\lambda^2 - \Omega)\gamma^2 - 120\delta - 10(1 + k^2)\gamma^2 + 64(1 - k^2 + k^4) = 0.\end{gathered}$$

C.

$$y^{\text{IV}} + (\alpha - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)y'' + (\beta - 12k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)y' + (\gamma + \delta k^2 \operatorname{sn}^2 u)y = 0,$$

avec la relation

$$12\gamma - \delta^2 - 2\delta[\alpha - 4(1 + k^2)] = 0.$$

Les équations en ω et λ sont

$$\begin{gathered}6(\lambda^2 - \Omega) + 2\alpha + \delta - 4(1 + k^2) = 0,\\ 2\lambda^3 - \lambda(6\Omega + \delta) - 4\Omega_1 - \beta = 0.\end{gathered}$$

D.

$$y^{\text{IV}} + (\alpha - 4k^2 \operatorname{sn}^2 u)y'' + (\beta + \gamma k^2 \operatorname{sn}^2 u - 8k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)y' \\ + (\delta + \varepsilon k^2 \operatorname{sn}^2 u - 8k^4 \operatorname{sn}^4 u + \gamma k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)y = 0.$$

On a entre les constantes les deux conditions

$$8\alpha - 32(1 + k^2) + 4\varepsilon + \gamma^2 = 0,$$
$$4\beta + \gamma[\varepsilon - 4(1 + k^2)] = 0.$$

Ce dernier cas présente un second exemple de la circonstance remarquable qui s'est offerte dans l'une des équations du troisième ordre, la quantité λ ayant dans toutes les intégrales particulières la même valeur, à savoir $\lambda = -\frac{7}{4}$. L'équation en ω est ensuite

$$90\lambda^4 - 15(\lambda^2 - \Omega)[3\varepsilon - 8(1 + k^2)] - 360\lambda^2\Omega - 360\lambda\Omega_1 \\ - 90\Omega_2 - 90\delta - 30\varepsilon(1 + k^2) + 16(11 + 4k^2 + 11k^4) = 0.$$

XXXIX.

Les recherches dont je viens d'énoncer succinctement les premiers résultats ont été étendues par M. Mittag-Leffler aux équations linéaires d'ordre quelconque, dans un travail qui paraîtra prochainement. Il sera ainsi établi que la théorie des fonctions elliptiques conduit aux premiers types généraux, après celui des équations à coefficients constants, dont la solution est connue sous forme explicite. L'équation de Lamé

$$D_x^2 y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

ayant été l'origine et le point de départ de ces recherches, doit d'autant plus appeler notre attention, et j'y reviens pour aborder un second cas, celui de $n = 2$, en me proposant d'en faire l'application à la théorie du pendule. Je traiterai ce cas par une méthode spéciale que j'expose avant d'arriver au cas général où le nombre n est quelconque, afin de réunir divers points de vue sous lesquels peut être traitée la même question. Reprenons à cet effet l'équation considérée au § XXX (p. 79) et dont nous avons obtenu la solution complète, à savoir :

$$D_u^2 y - \left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)}\right] D_u y \\ + \left[\frac{A \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{B \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - C^2\right] y = 0.$$

Soit $u = x + i\mathrm{K}'$, et changeons aussi a et b en $a + i\mathrm{K}'$ et $b + i\mathrm{K}'$, de sorte que les constantes A et B deviennent

$$\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a - b)} + \mathrm{C},$$

$$\mathrm{B} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b - a)} - \mathrm{C},$$

L'équation prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_x^2 y - \left[\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x - a)} + \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(x - b)}\right] \mathrm{D}_x y \\ &\quad + \left[\frac{\mathrm{A} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x - a)} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(x - b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a - b)} - \mathrm{C}^2\right] y = 0, \end{aligned}$$

et aura pour solution la fonction de seconde espèce

$$y = \frac{\mathrm{H}(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x},$$

les quantités ω et λ étant déterminées maintenant par les conditions

$$\lambda - \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a - b)} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a + \omega)},$$

$$\lambda + \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b - a)} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + \frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b + \omega)}.$$

Cela posé, considérons le cas où $b = -a$; on trouve aisément, en chassant le dénominateur $\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a$, l'équation

$$\begin{aligned} &(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a) \mathrm{D}_x^2 y - 2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \mathrm{D}_x y \\ &\quad + \left[\frac{2 \mathrm{A} \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} \operatorname{sn}^2 x + \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2a} - \mathrm{C}^2\right)(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a)\right] y = 0. \end{aligned}$$

Particularisons encore davantage et, observant qu'on a

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\operatorname{sn} 2a} + \mathrm{C},$$

faisons disparaître le terme en $\operatorname{sn}^2 x$ dans le coefficient de y, en posant

$$\frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{1}{\operatorname{sn} 2a} + \mathrm{C}.$$

Ce coefficient se réduisant à une constante, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} &(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a) \mathrm{D}_x^2 y - 2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \mathrm{D}_x y \\ &\quad + 2[3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1] y = 0. \end{aligned}$$

Soit donc, pour un moment,

$$\Phi(x) = \mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a;$$

on voit qu'on peut l'écrire ainsi :

$$\Phi(x) \mathrm{D}_x^2 y - \Phi'(x) \mathrm{D}_x y + \Phi''(a) y = 0,$$

et l'on en conclut, par la différentiation,

$$\Phi(x) \mathrm{D}_x^3 y - [\Phi''(x) - \Phi''(a)] \mathrm{D}_x y = 0.$$

Ce résultat remarquable donne, en remplaçant $\mathrm{D}_x y$ par z,

$$\mathrm{D}_x^2 z = \left[\frac{\Phi''(x) - \Phi''(a)}{\Phi(x)}\right] z = (6k^2 \,\mathrm{sn}^2 x + 6k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 4 - 4k^2) z:$$

c'est précisément l'équation de Lamé dans le cas de $n = 2$, la constante qui y figure étant $h = 6k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 4 - 4k^2$. Nous n'avons donc plus, pour parvenir à notre but, qu'à former l'intégrale de l'équation en y, c'est-à-dire à déterminer les quantités ω et λ au moyen des équations rappelées plus haut. Introduisons, à cet effet, les conditions $b = -a$, $\mathrm{C} = \frac{2 \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{\mathrm{sn}\, a} - \frac{1}{\mathrm{sn}\, 2a}$; on en tirera successivement, en les retranchant et les ajoutant,

$$\frac{\mathrm{sn}^2 \omega}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \omega} = \frac{\mathrm{sn}^2 a (2k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1 - k^2)}{\mathrm{cn}^2 a \,\mathrm{dn}^2 a},$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{cn}\,\omega \,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \omega}.$$

De là nous concluons d'abord, pour ω, les expressions suivantes :

$$\mathrm{sn}^2 \omega = \frac{\mathrm{sn}^4 a (2k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2 \,\mathrm{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \mathrm{sn}^2 a + 1},$$

$$\mathrm{cn}^2 \omega = - \frac{\mathrm{cn}^4 a (2k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \,\mathrm{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \mathrm{sn}^2 a + 1},$$

$$\mathrm{dn}^2 \omega = - \frac{\mathrm{dn}^4 a (2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \,\mathrm{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \mathrm{sn}^2 a + 1}.$$

On a ensuite

$$\lambda^2 = \frac{\mathrm{sn}^2 \omega \,\mathrm{cn}^2 \omega \,\mathrm{dn}^2 \omega}{(\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \omega)^2} = \frac{(2k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1 - k^2)(2k^2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1)(2 \,\mathrm{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \,\mathrm{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \mathrm{sn}^2 a + 1},$$

et l'on voit que les constantes $\mathrm{sn}^2 \omega$ et λ^2 sont des fonctions rationnelles de $\mathrm{sn}^2 a$ ou de h. Nous remarquerons en même temps que, $\mathrm{sn}\,\omega$ et, par conséquent, ω ayant deux déterminations égales et de signes contraires, le signe de λ est donné par celui de ω, en vertu de la relation $\lambda = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2\omega}$. Aucune ambiguïté ne s'offre donc dans la formule

$$y = C\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} + C'\frac{H(x-\omega)}{\Theta(x)}e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x},$$

et l'on en conclut, pour l'intégrale de l'équation de Lamé

$$D_x^2 y = (6k^2 \operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2)y,$$

l'expression

$$y = CD_x \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} + C'D_x\frac{H(x-\omega)}{\Theta(x)}e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}.$$

Voici les remarques auxquelles elle donne lieu.

XL.

Nous allons supposer nulle ou infinie la quantité λ, en nous proposant d'étudier les circonstances qu'offre alors la solution de l'équation différentielle.

Et d'abord, on voit, par l'expression de λ^2, que le premier cas a lieu en posant les conditions

$$2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2 = 0,$$
$$2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 = 0,$$
$$2 \operatorname{sn}^2 a - 1 = 0,$$

qui donnent successivement $\operatorname{sn}\omega = 0$, $\operatorname{cn}\omega = 0$, $\operatorname{dn}\omega = 0$. Les valeurs de ω qui en résultent, à savoir, $\omega = 0$, $\omega = K$, $\omega = K + iK'$, conduisent aux solutions considérées par Lamé, qui sont des fonctions doublement périodiques de la variable, avec la périodicité caractéristique de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Nous avons, en effet, pour $\omega = 0$ et $\omega = K$: $y = D_x \operatorname{sn} x$, $y = D_x \operatorname{cn} x$. Il suffit ensuite d'employer les relations

$$H(x + K + iK') = \Theta_1(x)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$\frac{\Theta'(K+iK')}{\Theta(K+iK')} = -\frac{i\pi}{2K},$$

pour conclure de la valeur $\omega = K + iK'$ l'expression $y = D_x \operatorname{dn} x$.

Supposons maintenant λ infini, et soit à cet effet

$$3k^2\,\mathrm{sn}^4 a - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2 a + 1 = 0;$$

en désignant une solution de cette équation par $a = \alpha$, je ferai $a = \alpha + \eta$, $\omega = i\mathrm{K}' + \varepsilon$, les quantités η et ε étant infiniment petites. D'après la relation

$$\mathrm{sn}^2\omega = \frac{\mathrm{sn}^4 a(2k^2\,\mathrm{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2\,\mathrm{sn}^4 a - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2 a + 1},$$

on voit d'abord qu'on aura, en développant en série,

$$\varepsilon^2 = p\eta + q\eta^2 + \ldots,$$

p, q étant des constantes. Cela étant, nous développerons aussi λ suivant les puissances croissantes de ε, au moyen de l'expression

$$\lambda = \frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2\omega} = \frac{\mathrm{cn}\,\varepsilon\,\mathrm{dn}\,\varepsilon}{\mathrm{sn}\,\varepsilon}\,\frac{1}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\eta)\,\mathrm{sn}^2\varepsilon}.$$

Or, ayant

$$\frac{\mathrm{cn}\,\varepsilon\,\mathrm{dn}\,\varepsilon}{\mathrm{sn}\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1+k^2}{3}\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{1}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\eta)\,\mathrm{sn}^2\varepsilon} = 1 + k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha.\varepsilon^2 + \ldots,$$

on en conclut

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\left(+k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha - \frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots.$$

Employons maintenant l'équation

$$\frac{\Theta'(i\mathrm{K}'+\varepsilon)}{\Theta(i\mathrm{K}'+\varepsilon)} = \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots,$$

nous obtenons cette expression, qui est finie, pour $\varepsilon = 0$, à savoir

$$\lambda - \frac{\Theta'(i\mathrm{K}'+\varepsilon)}{\Theta(i\mathrm{K}'+\varepsilon)} = \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \left(k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\varepsilon + \ldots.$$

Enfin, je remplace, dans la solution de l'équation différentielle, la quantité $\mathrm{H}(x + i\mathrm{K} + \varepsilon)$ par

$$i\Theta(x+\varepsilon)e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+2\varepsilon+i\mathrm{K}')};$$

il viendra ainsi

$$\frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} = ie^{\frac{\pi\mathrm{K}'}{4\mathrm{K}}}\frac{\Theta(x+\varepsilon)e^{g x}}{\Theta(x)},$$

en faisant, pour abréger,

$$g = -\frac{i\pi}{2K} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - \frac{J}{K}\right) x.$$

Or, en développant suivant les puissances de ε, on obtient, si l'on se borne aux deux premiers termes,

$$\frac{\Theta(x+\varepsilon) e^{g\varepsilon}}{\Theta(x)} = 1 + \left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right]\varepsilon;$$

il suffira donc de remplacer la constante arbitraire C par $\frac{C}{\varepsilon}$, pour avoir la limite cherchée, lorsqu'on pose $\varepsilon = 0$. Nous trouvons ainsi

$$\frac{1}{\varepsilon} D_x\left[\frac{\Theta(x+\varepsilon) e^{g\varepsilon}}{\Theta(x)}\right] = D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right] = k^2(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2 x),$$

où la constante $\operatorname{sn}^2\alpha$ est déterminée par l'équation

$$3k^2 \operatorname{sn}^4\alpha - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha + 1 = 0.$$

Ces deux solutions de l'équation différentielle, réunies à celles qui ont été obtenues précédemment, complètent l'ensemble des cinq solutions de Lamé, qui sont des fonctions doublement périodiques, ces deux dernières ayant, comme on voit, la périodicité de $\operatorname{sn}^2 x$.

XII.

La théorie du pendule conique ou du mouvement d'un point pesant sur une sphère conduit à une application immédiate de l'équation qui vient de nous occuper. C'est M. Tissot qui a le premier traité cette question importante, par une analyse semblable à celle de Jacobi dans le problème de la rotation, et donné explicitement, en fonction du temps, les coordonnées du point mobile (*Thèse de Mécanique, Journal de M. Liouville*, t. XVII, p. 88). En suivant une autre marche, nous trouvons une autre forme analytique de la solution que j'ai indiquée, sans démonstration, dans une Lettre adressée à M. H. Gyldén et publiée dans le *Journal de Borchardt*, t. 85, p. 246. Ces résultats s'établissent de la manière suivante.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point pesant, assujetti à rester sur une sphère de rayon égal à l'unité; les équations du mouvement, si l'on désigne par g la pesanteur et N la force accélératrice, seront (¹)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Nx = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ny = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Nz = g,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Elles donnent d'abord, comme on sait, en désignant par c et l des constantes :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z+c),$$

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = l.$$

Cela étant, j'emploie la combinaison suivante :

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + i\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$

et je remarque que le carré du module du premier membre,

$$(x^2+y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

s'exprime par

$$(1-z^2)\left[2g(z+c) - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

de sorte qu'on obtient, en l'égalant au carré du module du second membre,

$$(1-z^2)\left[2g(z+c) - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + l^2,$$

ou bien

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z+c)(1-z^2) - l^2.$$

La variable z étant déterminée par cette relation, une première méthode pour obtenir les deux autres coordonnées consiste à diviser membre à

(¹) *Traité de Mécanique* de Poisson, t. I, p. 386.

membre les équations

$$(x + iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$
$$x^2 + y^2 = 1 - z^2.$$

On obtient facilement ainsi les expressions qui conduisent aux résultats de M. Tissot, à savoir :

$$x - iy = e^{-\int \frac{z\,dz - il\,dt}{1-z^2}},$$

puis, en changeant i en $-i$,

$$x + iy = e^{-\int \frac{z\,dz + il\,dt}{1-z^2}}.$$

Mais j'opérerai différemment; je déduis d'abord des équations différentielles, et les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par x, y, z,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \mathrm{N} = gz,$$

puis de l'équation de la sphère, différentiée deux fois,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2g(z+c).$$

Nous avons donc

$$\mathrm{N} = g(3z + 2c),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} = -g(3z + 2c)(x + iy);$$

or on est ainsi amené à l'équation de Lamé, dans le cas de $n = 2$, comme nous allons le voir.

Formons pour cela l'expression de z, et soit à cet effet

$$2g(z+c)(1-z^2) - l^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -c, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= -1, \\ \alpha\beta\gamma &= c - \frac{l^2}{2g}. \end{aligned}$$

On sait que les racines α, β, γ sont nécessairement réelles, et qu'en les rangeant par ordre décroissant de grandeur α sera positive, β positive ou négative, et toutes deux moindres en valeur absolue que l'unité, tandis que γ sera négative et supérieure à l'unité en valeur absolue. Soit donc

$$k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma},$$
$$u = n(t - t_0),$$
$$n = \sqrt{\frac{g(\alpha - \gamma)}{2}},$$

on aura

$$z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2(u, k),$$

t_0 étant une constante et le coefficient n étant pris positivement. Introduisons maintenant la variable u dans l'équation du second ordre, elle deviendra

$$D_u^2(x + iy) = \frac{g}{n^2}[3(\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2 u - 3\alpha + 2c]\,(x + iy)$$

et, en simplifiant,

$$D_u^2(x + iy) = \left(6k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 2\,\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma}\right)(x + iy).$$

C'est donc l'équation de Lamé dont nous avons donné la solution complète au moyen de deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce à multiplicateurs réciproques. Or une seule de ces fonctions doit figurer dans l'expression de $x + iy$, comme le montre la formule obtenue tout à l'heure

$$x + iy = e^{-\int \frac{z\,dz + il\,dt}{1 + z^2}};$$

par conséquent, nous pouvons immédiatement écrire

$$x + iy = \mathrm{C}\,D_u \frac{\mathrm{H}(u + \omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] u}$$

ou, sous une autre forme, en modifiant la constante arbitraire.

$$x + iy = \mathrm{A}\,D_u \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u + \omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] u};$$

maintenant il nous faut déterminer cette constante, ainsi que les quantités ω et λ.

XLII.

En posant la condition

$$6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2 = -2\,\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma},$$

et employant l'expression du module $k^2 = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$, on trouve d'abord

$$\operatorname{sn}^2 a = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

De là se tirent ensuite, après quelques réductions faciles où l'on fera usage de la relation

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1,$$

les formules suivantes :

$$\operatorname{sn}^2 \omega = -\frac{\alpha^2(\beta + \gamma)}{\alpha - \beta},$$

$$\operatorname{cn}^2 \omega = +\frac{\beta^2(\alpha + \gamma)}{\alpha - \beta},$$

$$\operatorname{dn}^2 \omega = +\frac{\gamma^2(\alpha + \beta)}{\alpha - \gamma},$$

$$\lambda^2 = -\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha - \gamma}.$$

Cela étant, nous remarquerons en premier lieu que, d'après les limites entre lesquelles sont comprises les quantités α, β, γ, on obtient pour $\operatorname{sn}^2 \omega$ et $\operatorname{dn}^2 \omega$ des valeurs positives, tandis que $\operatorname{cn}^2 \omega$ est négatif. Il en résulte que $\operatorname{sn}^2 \omega$ est plus grand que l'unité et moindre que $\frac{1}{k^2}$, de sorte qu'on doit supposer

$$\omega = \pm K + i\upsilon,$$

υ étant réel et donné par ces expressions

$$\operatorname{sn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)},$$

$$\operatorname{cn}^2(\upsilon, k') = \frac{\gamma^2(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)},$$

$$\operatorname{dn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta - \alpha}{\alpha^2(\beta + \gamma)}.$$

J'observe ensuite qu'ayant $n^2 = \frac{g(\alpha - \gamma)}{2}$ nous pouvons écrire la valeur de λ^2 de cette manière :

$$\lambda^2 = -\frac{g(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{2n^2},$$

d'où l'on conclut facilement

$$\lambda^2 = -\frac{l^2}{4n^2}.$$

Les constantes ω et λ se trouvent ainsi déterminées, mais seulement au signe près, et deux autres relations sont encore nécessaires pour lever toute ambiguïté. La première résulte d'abord de la condition qui a été donnée pour la solution générale de l'équation de Lamé, à savoir :

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega},$$

et l'on en tire immédiatement

$$\lambda = -\frac{(\alpha-\beta)\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma}.$$

Nous obtiendrons tout à l'heure la seconde comme conséquence de l'équation considérée plus haut :

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il.$$

Mais voici d'abord la détermination de la constante A qui entre dans la formule

$$x + iy = A D_u \frac{H'(0)\,H(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Soit, pour abréger,

$$F(u) = \frac{H'(0)\,H(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Désignons par $F_1(u)$ ce que devient cette fonction lorsqu'on change i en $-i$, et par A_1 la quantité conjuguée de A, de sorte qu'on ait

$$x + iy = A\,F'(u),$$
$$x - iy = A_1\,F'_1(u),$$

et, par conséquent,

$$x^2 + y^2 = AA_1\,F'(u)\,F'_1(u).$$

Nous supposerons $u=0$, ce qui donne $z=\alpha$, dans l'équation $x^2+y^2+z^2=1$; il viendra ainsi

$$AA_1 F'(0)\,F'_1(0)=1-\alpha^2,$$

ou encore, au moyen de la condition $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma d=-1$,

$$AA_1 F'(0)F'_1(0)=-(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma).$$

J'emploie maintenant, pour y faire $u=0$, la relation

$$\frac{F'(u)}{F(u)}=\frac{H'(u+\omega)}{H(u+\omega)}-\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}+\lambda;$$

on en tire d'abord

$$\frac{F'(0)}{F(0)}=\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}+\lambda,$$

puis, au moyen de la valeur donnée précédemment de λ,

$$\frac{F'(0)}{F(0)}=\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\gamma}\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega=\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\gamma}\operatorname{sn}^2\omega\right),$$

et enfin

$$\frac{F'(0)}{F(0)}=-\frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma\operatorname{sn}\omega},$$

comme conséquence de la formule

$$\operatorname{sn}^2\omega=-\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta};$$

mais l'expression de $F(u)$ donne immédiatement

$$F(0)=\frac{H'(0)\,H(\omega)}{\Theta(0)\,\Theta(\omega)}=k\operatorname{sn}\omega,$$

et nous en concluons l'expression cherchée, à savoir

$$F'(0)=-\frac{k\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma}.$$

Changeons enfin i en $-i$; la constante $\omega=\pm K+i\upsilon$ deviendra

$$\omega'=\pm K-i\upsilon;$$

on a donc

$$\operatorname{sn}\omega'=\operatorname{sn}\omega,\quad \operatorname{cn}\omega'\operatorname{dn}\omega'=-\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega,$$

et par suite

$$F'(0)\,F'_1(0)=-\frac{k^2\operatorname{cn}^2\omega\operatorname{dn}^2\omega}{\beta^2\gamma^2}=-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2}.$$

De cette expression nous tirons

$$AA_1 = (\alpha - \gamma)^2,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$A = (\alpha - \gamma)e^{i\varphi},$$

φ désignant un angle arbitraire.

Ce point établi, je reprends l'équation

$$(x + iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$

qui devient, si l'on introduit, au lieu de t, la variable u,

$$(x + iy)\left(\frac{dx}{du} - i\frac{dy}{du}\right) = -z\frac{dz}{du} + \frac{il}{n},$$

et j'y fais $u = 0$. En remarquant qu'alors $\frac{dz}{du}$ s'évanouit, on trouve

$$(\alpha - \gamma)^2 F'(0) F'_1(0) = \frac{il}{n},$$

ce qui nous mène à chercher la valeur de $F'_1(0)$. Pour cela, je déduis de la relation employée tout à l'heure

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{H'(u+\omega)}{H(u+\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \lambda,$$

la suivante :

$$\frac{F''(u)}{F(u)} - \frac{F'^2(u)}{F^2(u)} = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2(u+\omega)} + k^2\mathrm{sn}^2 u,$$

et j'en tire d'abord

$$\frac{F''(0)}{F(0)} = \frac{F'^2(0)}{F^2(0)} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2\omega} = \frac{\mathrm{cn}^2\omega\,\mathrm{dn}^2\omega}{\beta^2\gamma^2\mathrm{sn}^2\omega} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2\omega},$$

puis, après une réduction facile et au moyen de la valeur obtenue pour $F(0)$,

$$F''(0) = -\frac{2k\,\mathrm{sn}\,\omega}{\alpha(\alpha-\gamma)}.$$

Cette expression restant la même lorsqu'on change i en $-i$, nous pouvons écrire

$$F''_1(0) = -\frac{2k\,\mathrm{sn}\,\omega}{\alpha(\alpha-\gamma)},$$

et, comme on a déjà trouvé

$$F'(o) = -\frac{k \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma},$$

nous en concluons

$$F'(o) F''_1(o) = \frac{2k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma(\alpha-\gamma)},$$

et, en employant la valeur de k^2, l'équation suivante :

$$(\alpha-\gamma)^2 F'(o) F''_1(o) = \frac{2(\alpha-\beta) \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma} = \frac{il}{n}.$$

Si on se rapproche maintenant de la relation déjà donnée

$$\lambda = -\frac{(\alpha-\beta) \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma},$$

on trouve immédiatement

$$\lambda = -\frac{il}{2n};$$

c'est le résultat que j'ai principalement en vue d'obtenir, afin d'avoir la détermination précise de la constante λ, qui n'était encore connue qu'au signe près.

En dernier lieu, et à l'égard de ω, on remarquera que la fonction $F(u)$ change seulement de signe ou se reproduit quand on met $\omega + 2K$ et $\omega + 2iK'$ à la place de ω. Et comme on peut obtenir un tel changement de signe pour la valeur de $x + iy$, en remplaçant φ par $\varphi + \pi$ dans l'argument du facteur constant A, il en résulte qu'il est permis de faire $\omega = K + i\upsilon$, au lieu de $\omega = \pm K + i\upsilon$, et de déterminer une valeur de υ, comprise entre $-K'$ et $+K'$.

Or, de la relation

$$\operatorname{sn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)},$$

se tirent deux valeurs égales et de signes contraires de cette quantité entre lesquelles il reste à choisir. C'est à quoi l'on parvient au moyen de la condition

$$\frac{il}{2n} = \frac{(\alpha-\beta) \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma},$$

qui prend, si l'on y fait $\omega = K + i\upsilon$, la forme suivante,

$$\frac{l}{2n} = -\frac{(\alpha-\beta) k'^2 \operatorname{sn}(\upsilon, k) \operatorname{cn}(\upsilon, k')}{\alpha\beta\gamma \operatorname{dn}^3(\upsilon, k')};$$

or, γ étant négatif, on voit ainsi que v aura le signe de l ou un signe contraire, suivant que la racine moyenne β sera positive ou négative. Dans le cas de $\beta = 0$, on a donc

$$\omega = \mathrm{K}$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}(u) = k\,\mathrm{D}_u e^{\frac{ilu}{2n}} \operatorname{cn} u :$$

c'est un exemple de ces fonctions particulières de seconde espèce qui ont été considérées par M. Mittag-Leffler dans un article intitulé, *Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 177).

XLIII.

Je terminerai par une remarque sur l'équation

$$\frac{il}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = 0,$$

qui exprime que les coordonnées x et y se reproduisent sauf le signe, lorsqu'on change u en $u + 2\mathrm{K}$. Soit $\omega = \mathrm{K} + iv$ et posons

$$i\,\Pi(v) = \frac{il}{n} + \frac{\Theta'(\mathrm{K}+iv)}{\Theta(\mathrm{K}+iv)};$$

cette fonction $\Pi(v)$, évidemment réelle, finie et continue pour toute valeur réelle de v, a pour dérivée l'expression

$$\Pi'(v) = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2(\mathrm{K}+iv),$$

qui est toujours négative. On a, en effet,

$$\mathrm{J} < k^2\mathrm{K},$$

comme conséquence des formules

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et l'on sait d'ailleurs que $\operatorname{sn}^2(\mathrm{K}+iv)$ est supérieur à l'unité. La fonction $\Pi(v)$, étant décroissante, ne peut s'évanouir qu'une fois; or on a, en désignant par a un nombre entier,

$$\frac{\Theta'(\mathrm{K}+2ia\mathrm{K}')}{\Theta(\mathrm{K}+2ia\mathrm{K}')} = -\frac{ia\pi}{\mathrm{K}},$$

et par conséquent

$$\Pi(0) = \frac{l}{n}, \quad \Pi(2a\mathrm{K}') = \frac{l}{n} - \frac{a\pi}{\mathrm{K}}.$$

Nous établissons ainsi l'existence d'une racine, puisqu'on peut disposer de a de manière que $\frac{l}{n} - \frac{a\pi}{\mathrm{K}}$ soit de signe contraire à $\frac{l}{n}$. Mais c'est en déterminant les quantités c et l qu'il serait surtout important d'obtenir les cas où le mouvement du pendule est périodique, ces constantes représentant les éléments essentiels de la question. N'ayant pu surmonter les difficultés qui s'offrent alors, je me borne à donner de l'équation précédente une transformée où ces constantes se trouvent plus explicitement en évidence. Soit, à cet effet,

$$\mathrm{R}(z) = 2g(z + c)(1 - z^2) - l^2;$$

on aura, en premier lieu,

$$\mathrm{K} = \int_\beta^\alpha \frac{n\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}, \quad \mathrm{J} = \int_\beta^\alpha \frac{n(\alpha - z)\,dz}{(\alpha - \gamma)\sqrt{\mathrm{R}(z)}};$$

on trouvera ensuite

$$z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2\omega = -\alpha\beta\gamma,$$

d'où

$$\omega = \int_{-\alpha\beta\gamma}^\alpha \frac{n\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}, \quad \int_0^\omega k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,dx = \int_{-\alpha\beta\gamma}^\alpha \frac{n(\alpha - z)\,dz}{(\alpha - \gamma)\sqrt{\mathrm{R}(z)}}.$$

Enfin, en partageant l'intervalle compris entre les limites, en deux parties, l'une de $-\alpha\beta\gamma$ à β, et l'autre de β à α, l'équation se présentera, après une réduction facile, sous la forme suivante :

$$\frac{2l}{g}\int_\beta^\alpha \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = \int_\beta^\alpha \frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} \int_{-\alpha\beta\gamma}^\beta \frac{dz}{\sqrt{-\mathrm{R}(z)}} - \int_\beta^\alpha \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} \int_{-\alpha\beta\gamma}^\beta \frac{z\,dz}{\sqrt{-\mathrm{R}(z)}}.$$

La question qui vient d'être traitée termine les applications à la Mécanique que j'ai annoncées au commencement de ce travail, et j'arrive maintenant, pour la considérer dans toute sa généralité, à l'équation

$$\mathrm{D}_x^2 y = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h]y,$$

dont la solution n'a encore été obtenue que pour $n = 1$ et $n = 2$. Au moyen des méthodes de M. Fuchs, permettant de reconnaître que l'intégrale est une fonction uniforme de la variable, et de l'importante proposition de M. Picard, que cette intégrale est dès lors une fonction doublement périodique de seconde espèce, la solution de l'équation de Lamé est donnée directement par l'application de principes généraux s'appliquant aux équations linéaires d'un ordre quelconque. J'exposerai néanmoins une méthode indépendante de ces principes; je m'attacherai ensuite, et ce sera mon principal but, à la question difficile de la détermination, sous forme entièrement explicite, des éléments de la solution. La considération du développement en série, qu'on tire de l'équation proposée lorsqu'on suppose $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$, aura, dans ce qui va suivre, une grande importance; voici, en premier lieu, comment on l'obtient.

XLIV.

Soit, pour abréger,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1 \varepsilon^2 + \ldots + s_i \varepsilon^{2i} + \ldots,$$

les expressions des premiers coefficients étant

$$s_0 = \frac{1 + k^2}{3},$$

$$s_1 = \frac{1 - k^2 + k^4}{15},$$

$$s_2 = \frac{2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6}{189},$$

$$s_3 = \frac{2(1 - k^2 + k^4)^2}{675}.$$

Je dis qu'on vérifie l'équation

$$\mathrm{D}_\varepsilon^2 y = \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} + h\right] y,$$

en posant

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \cdots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \cdots.$$

La substitution donne en effet les conditions

$$\begin{aligned}
(n-1)(n-2)h_1 &= h + n(n+1)(h_1 + s_0),\\
(n-3)(n-4)h_2 &= hh_1 + n(n+1)(h_2 + s_0 h_1 + s_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et nous allons voir qu'elles déterminent de proche en proche les coefficients h_1, h_2, ... Mettons-les d'abord sous une forme plus simple; en éliminant la quantité h au moyen de la première, on aura, après une réduction facile,

$$i(2n-2i+1)h_i=(2n-1)h_1h_{i-1}+m(s_1h_{i-2}+s_2h_{i-3}+\ldots+s_{i-1}),$$

où j'ai écrit, pour abréger, $n(n+1)=2m$.

Or, le facteur $2n-2i+1$ ne pouvant jamais être nul, on voit que le coefficient de rang quelconque h_i s'obtient au moyen des précédents, h_{i-1}, h_{i-2}, ... En particulier, on trouve

$$h_2=\frac{(2n-1)h_1^2}{2(2n-3)}-\frac{ms_1}{2(2n-3)},$$
$$h_3=\frac{(2n-1)^2h_1^3}{6(2n-3)(2n-5)}-\frac{m(6n-7)s_1h_1}{6(2n-3)(2n-5)}-\frac{ms_2}{3(2n-5)}.$$

Ce premier développement obtenu, nous en concluons immédiatement un second. Effectivement, le coefficient $n(n+1)$ ne change pas si l'on remplace n par $-(n+1)$, de sorte qu'en désignant par h'_1, h'_2, ... ce que deviennent h_1, h_2, ... par ce changement, l'équation différentielle sera de même satisfaite en prenant

$$y=\varepsilon^{n+1}+h'_1\varepsilon^{n+3}+h'_2\varepsilon^{n+5}+\ldots,$$

ou bien

$$y=\varepsilon^{n+1}(1+h'_1\varepsilon^2+h'_2\varepsilon^4+\ldots).$$

Je remarque enfin qu'en substituant dans l'expression

$$D_\varepsilon^2 y-\left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2\varepsilon}+h\right]y$$

la partie de la première série représentée par

$$y=\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}}+\cdots+\frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}},$$

tous les termes en $\frac{1}{\varepsilon^{n+2}}$, $\frac{1}{\varepsilon^n}$, ..., $\frac{1}{\varepsilon^{n-2i+2}}$ disparaissent, de sorte que le résultat ordonné suivant les puissances croissantes de ε commence par un terme en $\frac{1}{\varepsilon^{n-2i}}$. On en conclut qu'en supposant n pair et égal à 2ν, ou bien $n=2\nu-1$, on n'aura aucun terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, si l'on prend dans le premier cas

$$y=\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}}+\frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}}+\ldots+\frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2}+h_\nu,$$

et dans le second

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon.$$

Ce point établi, nous obtenons facilement, comme on va le voir, la solution générale de l'équation de Lamé.

XLV.

Je considère l'élément simple des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, en le prenant sous la forme suivante :

$$f(x) = e^{\lambda(x-iK')}\chi(x),$$

où l'on a, comme au § V,

$$\chi(x) = \frac{H'(0)H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x-iK')+\frac{i\pi\omega}{2K}}.$$

Le résidu qui correspond au pôle unique $x = iK'$ sera ainsi égal à l'unité, et nous pourrons écrire

$$f(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1\varepsilon + \ldots + H_i\varepsilon^i + \ldots.$$

Cela posé, je dis que les expressions

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}D_x f(x),$$
$$F(x) = +\frac{D_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1 \frac{D^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}f(x)$$

satisferont, suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, à l'équation différentielle en déterminant convenablement les constantes ω et λ.

Pour le démontrer, je remarque que, si l'on pose $x = iK' + \varepsilon$, les parties principales de leurs développements proviendront du seul terme $\frac{1}{\varepsilon}$ qui entre dans $f(iK'+\varepsilon)$, et seront, par conséquent,

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon}.$$

Disposons maintenant de ω et λ, de telle sorte que dans le premier cas le terme constant soit égal à h_ν et le coefficient de ε, dans le suivant, égal à zéro; nous poserons pour cela les conditions

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$
$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu - 2) h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu - 4) h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2 h_{\nu-1} H_2 = 0.$$

Et semblablement, dans le second cas, faisons en sorte que le terme constant soit nul et le coefficient de ε égal à h_ν, en écrivant

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$
$$(2\nu - 1) H_{2\nu-1} + (2\nu - 3) h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0.$$

On a donc ces deux développements, à savoir :

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu + \ldots,$$

puis

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon + \ldots;$$

il en résulte que les deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

étant finies pour $x = iK'$, sont par conséquent nulles. Nous avons ainsi démontré que l'équation se trouve vérifiée en faisant $y = F(x)$, de sorte que l'expression

$$y = CF(x) + C'F(-x)$$

en donne l'intégrale générale.

XLVI.

La question qui s'offre maintenant est d'obtenir ω et λ au moyen des relations précédentes, qui sont algébriques en $\operatorname{sn}\omega$ et λ. Or, on est de la sorte amené à un problème d'Algèbre dont la difficulté se montre au premier coup d'œil et résulte de la complication des coefficients H_0, H_1, ...

Revenons, en effet, au développement déjà donné § V, à savoir :

$$\chi(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \frac{1}{30}\Omega_3\varepsilon^4 - \ldots,$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
\Omega\ &= k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},\\
\Omega_1 &= k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,\\
\Omega_2 &= k^4 \operatorname{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\operatorname{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45},\\
\Omega_3 &= k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega\left(k^2\operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Les coefficients H_0, H_1, ... résultant de l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_0\varepsilon + \ldots = \left(1 + \lambda\varepsilon + \frac{\lambda^2\varepsilon}{2} + \ldots\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \ldots\right)$$

seront

$$\begin{aligned}
H_0 &= \lambda,\\
H_1 &= \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \Omega),\\
H_2 &= \tfrac{1}{6}(\lambda^3 - 3\Omega\lambda - 2\Omega_1),\\
H_3 &= \tfrac{1}{24}(\lambda^4 - 6\Omega\lambda^2 - 8\Omega_1\lambda - 3\Omega_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

et l'on voit que, H_n étant du degré $n+1$ en λ, l'une de nos deux équations est, par rapport à cette quantité, du degré n, et la seconde du degré $n+1$. A l'égard de $\operatorname{sn}\omega$, une nouvelle complication se présente en raison du facteur irrationnel $\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega$, qui entre dans $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, \ldots$; aussi paraît-il impossible de conclure de leur forme actuelle qu'elles ne donnent pour λ^2 et $\operatorname{sn}^2\omega$ qu'une seule et unique détermination. Et si l'on considère ces quantités comme des coordonnées, en se plaçant au point de vue de la Géométrie, on verra aisément que les courbes représentées par nos deux équations n'ont aucun point d'intersection indépendant de la constante h qui entre sous forme rationnelle et entière dans les coefficients. Il n'est donc pas possible d'employer les méthodes si simples de Clebsch et de Chasles qui permettent de reconnaître, *a priori* et sans calcul, que les points d'un lieu géométrique se déterminent individuellement en fonction d'un paramètre. Le cas de $n = 3$, qui sera traité tout à l'heure, fera voir en effet que les intersections des deux courbes se trouvent, à l'exception d'une seule, rejetées à l'infini. Mais, avant d'y arriver, je ferai encore cette remarque, qu'on peut joindre aux équations déjà obtenues une infinité d'autres, dont voici l'origine.

Nous avons vu au § XLIV que l'équation de Lamé donne, en faisant $x = i\mathrm{R} + \varepsilon$, ces deux développements, à savoir :

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots,$$

$$y = \varepsilon^{n+1} + h'_1 \varepsilon^{n+3} + h'_2 \varepsilon^{n+5} + \ldots.$$

Il en résulte que, si l'on pose de même $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$ dans la solution représentée par $\mathrm{F}(x)$, nous aurons, en désignant par C une constante dont on obtiendra bientôt la valeur,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = {} & \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n+4}} + \ldots \\ & + \mathrm{C}(\varepsilon^{n+1} + h'_1 \varepsilon^{n+3} + h'_2 \varepsilon^{n+5} + \ldots). \end{aligned}$$

On peut donc identifier ce développement avec celui que donnent l'une ou l'autre des deux formules

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-1} f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1 \frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-3} f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1} \mathrm{D}_x f(x),$$

$$\mathrm{F}(x) = +\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-2} f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1 \frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-4} f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1} f(x)$$

lorsqu'on pose $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$.-Bornonsnous, pour abréger, au cas de $n = 2\nu$, et représentons la partie qui procède, suivant les puissances positives de ε, par

$$\sum_0 {}_i \mathfrak{H}_i \varepsilon^i.$$

On trouve facilement, si l'on écrit

$$m_i = \frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i},$$

l'expression

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_i = {} & -(i+2\nu-1)_i \mathrm{H}_{i+2\nu-1} - (i+2\nu-3) h_1 \mathrm{H}_{i+2\nu-3} \\ & - (i+2\nu-5)_i h_2 \mathrm{H}_{i+2\nu-5} - \ldots - (i+1) h_{\nu-1} \mathrm{H}_{i+1}. \end{aligned}$$

Nous aurons donc, pour $i = 1, 3, 5, \ldots, 2\nu - 1$, les équations

$$\mathfrak{H}_i = 0;$$

on trouvera ensuite, pour les valeurs paires de l'indice,

$$\mathfrak{H}_{2i} = h_{i+\nu},$$

et enfin, pour les valeurs impaires supérieures à $2\nu - 1$,

$$\mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} = Ch'_i.$$

Telles sont les relations, en nombre illimité, qui doivent toutes résulter des deux que nous avons données en premier lieu, à savoir :

$$\mathfrak{H}_1 = 0, \quad \mathfrak{H}_0 = -h_\nu;$$

on est amené ainsi à se demander si leurs premiers membres, $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_{2i} - h_{i+\nu}$, $\mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} - Ch'_i$, ne s'exprimeraient point, sous forme rationnelle et entière, par les fonctions $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_0 - h_\nu$. Mais je laisserai entièrement de côté cette question difficile, et j'arrive immédiatement à la résolution des équations relatives au cas de $n = 3$.

XLVII.

Ces équations ont été données au § XXXV, et sont

$$H_2 + h_1 H_0 = 0,$$
$$3H_3 + h_1 H_1 = h_2.$$

Si l'on met en évidence les quantités Ω, et qu'on fasse $h_1 = \frac{l}{2}$, ce qui donne

$$h = -4(1 + k^2) - 5l,$$
$$h_2 = \frac{5l^2}{24} - s_1,$$

elles prennent la forme suivante :

$$\lambda^3 - 3\Omega\lambda - 2\Omega_1 + 3l\lambda = 0,$$
$$\lambda^4 - 8\Omega\lambda^2 - 8\Omega_1\lambda - 3\Omega_2 + 2l\lambda^2 = \frac{5l^2}{3} - 8s_1.$$

Cela étant, j'emploie ces identités, à savoir :

$$\Omega^2 - \Omega_2 = 4s_1,$$
$$\Omega\Omega_2 - \Omega_1^2 = \Omega s_1 + 7s_2,$$

et je remarque qu'on en tire, par l'élimination de Ω_1 et Ω_2, deux équations du second degré en Ω. Mais il convient d'introduire H_1 au lieu de Ω; en faisant alors, pour un moment,

$$a = 1 - k^2 + k^4,$$
$$b = 2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6,$$

ces relations seront

$$36H_1^2 - 12lH_1 + 36l\lambda^2 + 5l^2 - 4a = 0,$$
$$72lH_1^2 - 6(5l^2 - a)H_1 + 72l^2\lambda^2 - b = 0.$$

Éliminons λ^2, elles donnent immédiatement

$$H_1 = -\frac{10l^3 - 3al - b}{6(l^2 - a)};$$

nous obtenons ensuite

$$\lambda^2 = -\frac{4(l^2 - a)^3 + (11l^3 - 9al - b)^2}{36l(l^2 - a)^2},$$

ou bien

$$\lambda^2 = -\frac{\varphi(l)}{36l(l^2 - a)^2},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi(l) = 125l^6 - 210al^4 - 22bl^3 + 93a^2l^2 + 18abl + b^2 - 4a^3,$$

soit encore

$$\psi(l) = 5l^6 + 6al^4 - 10bl^3 - 3a^2l^2 + 6abl + b^2 - 4a^3$$
$$= \varphi(l) - 12l(l^2 - a)(10l^3 - 8al - b);$$

de la relation $\lambda^2 - 2H_1 = \Omega$ on conclura :

$$\Omega = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1 + k^2}{3} = -\frac{\psi(l)}{36l(l^2 - a)^2}.$$

Enfin j'observe qu'on déduit des équations proposées la valeur de Ω_1 exprimée en Ω et λ, par cette formule,

$$2\Omega_1 = (\lambda^2 - 3\Omega + 3l)\lambda;$$

faisant donc

$$\chi(l) = l^6 - 6al^4 + 4bl^3 - 3a^2l^2 - b^2 + 4a^3,$$

nous parvenons encore à la relation

$$\Omega_1 = k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = -\frac{\chi(l)\lambda}{36l(l^2 - a)^2}.$$

Le signe de λ se trouve ainsi déterminé par celui de ω, et la solution complète de l'équation de Lamé dans le cas de $n = 3$ est obtenue sans aucune ambiguïté au moyen de la fonction

$$\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}.$$

On n'a toutefois pas mis en évidence dans les formules précédentes les valeurs de la constante l qui donnent les solutions doublement périodiques, ou les fonctions particulières de seconde espèce de M. Mittag-Leffler, comme nous l'avons fait dans le cas de $n = 2$.

Voici, dans ce but, les nouvelles expressions qu'on en déduit.

Posons, en premier lieu,

$$\begin{aligned} P &= 5l^2 - 2(1+k^2)l - 3(1-k^2)^2,\\ Q &= 5l^2 - 2(1-2k^2)l - 3,\\ R &= 5l^2 - 2(k^2-2)l - 3k^4,\\ S &= 36l, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} A &= l^2 - (1+k^2)l - 3k^2,\\ B &= l^2 - (1-2k^2)l + 3(k^2-k^4),\\ C &= l^2 - (k^2-2)l - 3(1-k^2),\\ D &= l^2 - 1 + k^2 - k^4, \end{aligned}$$

on aura

$$\lambda^2 = -\frac{PQR}{SD^2},$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2\omega = -\frac{PA^2}{SD^2},$$

$$k^2 \operatorname{cn}^2\omega = +\frac{QB^2}{SD^2},$$

$$\operatorname{dn}^2\omega = +\frac{RC^2}{SD^2},$$

et enfin, pour établir la correspondance des signes entre ω et λ, l'équation

$$k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = -\frac{ABC\lambda}{SD^2}.$$

Cela étant, ce sont les conditions $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ qui donnent les solutions doublement périodiques, au nombre de sept, tandis qu'on obtient les fonctions de M. Mittag-Leffler en posant $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Mais je laisse de côté l'étude détaillée de ces formules, en me bornant à la remarque suivante, sur laquelle je reviendrai plus tard. Exprimons les quantités $k^2 \operatorname{sn}^2 \omega$, $k^2 \operatorname{cn}^2 \omega$, $\operatorname{dn}^2 \omega$, en partant de l'équation

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1+k^2}{3} = -\frac{\psi(l)}{36l(l^2-a)^2},$$

de cette nouvelle manière, à savoir :

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \omega = \frac{12l(l^2-a)^2(1+k^2) - \psi(l)}{36l(l^2-a)^2},$$

$$k^2 \operatorname{cn}^2 \omega = \frac{12l(l^2-a)^2(2k^2-1) + \psi(l)}{36l(l^2-a)^2},$$

$$\operatorname{dn}^2 \omega = \frac{12l(l^2-a)^2(2-k^2) + \psi(l)}{36l(l^2-a)^2}.$$

On conclura facilement de l'égalité

$$k^4 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{cn}^2 \omega \operatorname{dn}^2 \omega = \frac{\varphi(l)\chi^2(l)}{[36l(l^2-a)^2]^3}$$

la relation que voici :

$$\psi^3(l) - 3.12^2 al^2(l^2-a)^4 \psi(l) + 12^3 bl^3(l^2-a)^6 = \varphi(l)\chi^2(l).$$

Or elle conduit à cette conséquence, qu'en posant

$$y = \frac{\psi(l)}{12l(l^2-a)^2},$$

on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 3ay + b}} = 2\sqrt{3} \int \frac{(5l^2-a)\,dl}{\sqrt{l\varphi(l)}};$$

c'est donc un exemple de réduction d'une intégrale hyperelliptique de seconde classe à l'intégrale elliptique de première espèce.

XLVIII.

La méthode générale que je vais exposer maintenant pour la détermination des constantes ω et λ repose principalement sur la considération du produit des solutions de l'équation de Lamé, qui viennent d'être représentées par $F(x)$ et $F(-x)$. Et, d'abord, on remarquera que, ayant

$$F(x + 2K) = \mu F(x),$$
$$F(x + 2iK') = \mu' F(x)$$

et, par suite,

$$F(-x-2K)=\frac{1}{\mu}F(-x),$$

$$F(-x-2iK')=\frac{1}{\mu'}F(-x),$$

ce produit est une fonction doublement périodique de première espèce, qui a pour pôle unique $x=iK'$. Voici, en conséquence, comment s'obtient son expression sous forme entièrement explicite.

Soit

$$\Phi(x)=(-1)^n\mu' F(x)F(-x),$$

le facteur μ' ayant été introduit, pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned}\Phi(iK'+\varepsilon)&=(-1)^n\mu' F(iK'+\varepsilon)F(-iK'-\varepsilon)\\&=(-1)^n\quad F(iK'+\varepsilon)F(\quad iK'-\varepsilon).\end{aligned}$$

Cela étant et posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}}+\frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}}+\dots,\\S_1&=C(\varepsilon^{n+1}+h'_1\varepsilon^{n+3}+h'_2\varepsilon^{n+5}+\dots),\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}F(iK'+\varepsilon)&=S+S_1,\\F(iK'-\varepsilon)&=(-1)^n(S-S_1),\end{aligned}$$

d'où, par conséquent,

$$\Phi(iK'+\varepsilon)=S^2-S_1^2.$$

On voit ainsi que la partie principale de développement suivant les puissances croissantes de ε est donnée par le premier terme S^2, et ne dépend point de la constante C, entrant dans le second terme, que nous ne connaissons pas encore. Faisons donc

$$S^2=\frac{1}{\varepsilon^{2n}}+\frac{A_1}{\varepsilon^{2n-2}}+\frac{A_2}{\varepsilon^{2n-4}}+\dots+\frac{A_{n-1}}{\varepsilon^2}+\dots;$$

les coefficients A_1, A_2, ... seront

$$\begin{aligned}A_1&=2h_1,\\A_2&=2h_2+h_1^2,\\A_3&=2h_3+2h_1h_2,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

et l'on en conclut que, h_i étant un polynôme de degré i en h_1, il en est de même, en général, pour un coefficient de rang quelconque A_i. Maintenant l'expression cherchée découle de la formule de décomposition en éléments simples, qui a été donnée au § II. Nous obtenons ainsi

$$\Phi(x) = -\frac{D_x^{2n-1}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n)} - A_1\frac{D^{2n-3}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n-2)} - A_2\frac{D^{2n-5}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n-4)} - \ldots$$
$$- A_{n-1}D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] + \text{const.}$$

La relation élémentaire

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

donnera ensuite, sous une autre forme, en désignant par A une nouvelle constante,

$$\Phi(x) = \frac{D_x^{2n-2}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n)} + A_1\frac{D^{2n-4}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-2)} + A_2\frac{D^{2n-6}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-4)} + \ldots$$
$$+ A_{n-1}(k^2\operatorname{sn}^2 x) + A.$$

Pour la déterminer, nous emploierons, en outre de la partie principale de la série S^2, le terme indépendant de ε, qui sera désigné par A_n. En déduisant ce même terme de l'expression de $\Phi(x)$, et se rappelant qu'on a fait

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1\varepsilon^2 + \ldots + s_i\varepsilon^{2i} + \ldots,$$

nous trouvons immédiatement

$$A = A_n - A_{n-1}s_0 - A_{n-2}\frac{s_1}{3} - \cdots - A_1\frac{s_{n-2}}{2n-3} - \frac{s_{n-1}}{2n-1}.$$

Beaucoup d'autres expressions s'obtiennent par un procédé semblable en fonction linéaire de dérivées successives de $k^2\operatorname{sn}^2 x$, celles-ci, par exemple,

$$D_x^\alpha F(x).D_x^\beta F(-x),$$

que je vais considérer dans le cas particulier de $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Soit alors

$$\Phi_1(x) = (-1)^{n+1}\mu' F'(x)F'(-x),$$

et désignons par S' et S'_1 les dérivées par rapport à ε des séries S et S_1, de sorte qu'on ait

$$F'(iK'+\varepsilon) = S' + S'_1,$$
$$F'(iK'-\varepsilon) = (-1)^{n+1}(S' - S'_1).$$

De la relation

$$\Phi_1(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = (-1)^{n+1}\,\mathrm{F}'(i\mathrm{K}' + \varepsilon)\,\mathrm{F}'(i\mathrm{K}' - \varepsilon),$$

on conclura cette expression, savoir

$$\Phi_1(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \mathrm{S}'^2 - \mathrm{S}_1'^2.$$

Faisant donc, comme tout à l'heure,

$$\mathrm{S}'^2 = \frac{n^2}{\varepsilon^{2n+2}} + \frac{\mathrm{B}_1}{\varepsilon^{2n}} + \frac{\mathrm{B}_2}{\varepsilon^{2n-2}} + \dots + \frac{\mathrm{B}_n}{\varepsilon^2} + \mathrm{B}_{n+1} + \dots,$$

où le coefficient B_i est encore un polynôme en h_1 de degré i, nous aurons

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) = n^2\,\frac{\mathrm{D}_x^{2n}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2n+2)} &+ \mathrm{B}_1\,\frac{\mathrm{D}_x^{2n-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2n)}\\ &+ \mathrm{B}_2\,\frac{\mathrm{D}^{2n-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-2)} + \dots + \mathrm{B}_n(k^2\,\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{B},\end{aligned}$$

et la constante sera donnée par la formule

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n s_0 - \mathrm{B}_{n-1}\,\frac{s_1}{3} - \dots - \mathrm{B}_1\,\frac{s_{n-1}}{2n-1} - n^2\,\frac{s_n}{2n+1}.$$

J'envisage enfin le déterminant fonctionnel formé avec les solutions $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}(-x)$ de l'équation de Lamé, et je pose

$$\Phi_2(x) = (-1)^{n+1}\mu'\,[\mathrm{F}(x)\mathrm{F}'(-x) + \mathrm{F}'(x)\mathrm{F}(-x)].$$

La relation suivante, qui s'obtient aisément, et dont le second membre ne contient que des termes entiers en ε, à savoir

$$\Phi_2(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = 2(\mathrm{S}\mathrm{S}_1' - \mathrm{S}'\mathrm{S}_1) = 2(2n+1)\mathrm{C} + \dots,$$

donne, comme on le voit, la proposition bien connue que cette fonction est constante; nous allons en obtenir la valeur en la mettant sous la forme

$$(2n+1)\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{N}},$$

que nous garderons désormais.

XLIX.

J'observe, à cet effet, que de l'identité

$$(\mathrm{S}\mathrm{S}' - \mathrm{S}_1\mathrm{S}_1')^2 = (\mathrm{S}\mathrm{S}_1' - \mathrm{S}_1\mathrm{S}')^2 + (\mathrm{S}^2 - \mathrm{S}_1^2)(\mathrm{S}'^2 - \mathrm{S}_1'^2)$$

on conclut immédiatement, entre les fonctions dont il vient d'être question, la relation suivante

$$\frac{1}{4}\Phi'^2(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{4}\Phi_2^2(iK'+\varepsilon) + \Phi(iK'+\varepsilon)\Phi_1(iK'+\varepsilon)$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{4}\Phi'^2(x) = N + \Phi(x)\Phi_1(x).$$

Elle fait voir qu'en attribuant à la variable une valeur particulière, en supposant, par exemple, $x = 0$, N s'obtient comme un polynôme entier en h_1 du degré $2n+1$, puisque cette quantité entre, comme on l'a vu, au degré n dans $\Phi(x)$, et au degré $n+1$ dans $\Phi_1(x)$. Ce point établi, nous remarquons que, en posant la condition $N = 0$, le déterminant fonctionnel $\Phi_2(x)$ est nul, de sorte que le quotient $\frac{F(x)}{F(-x)}$ se réduit alors à une constante. Désignons-la pour un instant par A, on voit que le changement de x en $-x$ donne $A = \frac{1}{A}$; on a donc $A = \pm 1$, et, par conséquent,

$$F(-x) = \pm F(x).$$

Remplaçons ensuite x par $x + 2K$ et $x + 2iK'$: le quotient se reproduit multiplié par μ^2 et μ'^2; ainsi il faut poser $\mu^2 = 1$, $\mu'^2 = 1$, c'est-à-dire $\mu = \pm 1$, $\mu' = \pm 1$.

La condition $N = 0$ détermine donc les valeurs de h, pour lesquelles l'équation de Lamé est vérifiée par des fonctions doublement périodiques. Ce sont ces solutions, auxquelles est attaché à jamais le nom du grand géomètre, et dont les propriétés lui ont permis de traiter pour la première fois le problème difficile de la détermination des températures d'un ellipsoïde, lorsque l'on donne en chaque point la température de la surface. Elles s'offrent en ce moment comme un cas singulier de l'équation différentielle, où l'intégrale cesse d'être représentée par la formule

$$y = CF(x) + C'F(-x)$$

et subit un changement de forme analytique. Je me borne à les signaler sous ce point de vue, devant bientôt y revenir, et je reprends, pour en tirer une nouvelle conséquence, l'équation

$$\frac{1}{4}\Phi'^2(x) = N + \Phi(x)\Phi_1(x).$$

Introduisons $\operatorname{sn}^2 x$ pour variable, en posant $\operatorname{sn}^2 x = t$; on voit que $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$, ne contenant que des dérivées d'ordre pair de $\operatorname{sn}^2 x$, deviendront des polynômes entiers en t des degrés n et $n+1$, que je désignerai par $\Pi(t)$ et $\Pi_1(t)$. Soit encore

$$R(t) = t(1-t)(1-k^2 t);$$

la relation considérée prend cette forme

$$R(t)\Pi'^2(t) = N + \Pi(t)\Pi_1(t);$$

et voici la remarque, importante pour notre objet, à laquelle elle donne lieu.

Développons la fonction rationnelle $\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}$ en fraction continue, et distinguons, dans la série des réduites, celle dont le dénominateur est du degré ν, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$. Si on la représente par $\frac{\theta(t)}{\varphi(t)}$, le développement, suivant les puissances décroissantes de t, de la différence

$$\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}\varphi(t) - \theta(t),$$

commencera ainsi par un terme en $\frac{1}{t^{\nu+1}}$, et, en posant

$$\Pi'(t)\varphi(t) - \Pi(t)\theta(t) = \psi(t),$$

on voit que, dans le premier cas, $\psi(t)$ sera un polynôme de degré $\nu - 1$, et, dans le second, de degré $\nu - 2$. Cela étant, je considère l'expression suivante

$$N\varphi^2(t) - R(t)\psi^2(t);$$

on trouve d'abord aisément, en employant la relation proposée et la valeur de $\psi(t)$, qu'elle devient

$$\Pi(t)[-\varphi^2(t)\Pi_1(t) + 2\varphi(t)\theta(t)R(t)\Pi'(t) - \theta^2(t)R(t)\Pi(t)],$$

et contient, par conséquent, en facteur, le polynôme $\Pi(t)$. On vérifie ensuite qu'elle est de degré $n+1$ en t, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$; nous pouvons ainsi poser

$$N\varphi^2(t) - R(t)\psi^2(t) = \Pi(t)(gt - g'),$$

et nous allons voir que ω est donné par la formule

$$\operatorname{sn}^2\omega = \frac{g'}{g},$$

où le second membre est une fonction rationnelle de h

L.

Considérons dans ce but une nouvelle fonction doublement périodique définie de la manière suivante

$$\Psi(x) = -\mu' f(-x)\, \mathrm{F}(x),$$

en faisant toujours

$$f(x) = e^{\lambda(x-i\mathrm{K}')}\chi(x),$$

de sorte que les deux facteurs $f(-x)$ et $\mathrm{F}(x)$ soient encore des fonctions de seconde espèce à multiplicateurs réciproques. Nous aurons d'abord

$$\Psi(x)\,\Psi(-x) = \mu'^2 f(x) f(-x)\, \mathrm{F}(x)\, \mathrm{F}(-x),$$

et, en employant l'égalité, qu'il est facile d'établir :

$$\mu' f(x) f(-x) = -k^2(\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 \omega),$$

on parvient à cette relation

$$\Psi(x)\,\Psi(-x) = (-1)^{n+1} k^2(\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2\omega)\,\Phi(x),$$

dont on va voir l'importance. Formons à cet effet l'expression de $\Psi(x)$ qui s'obtiendra sous forme linéaire au moyen des dérivées successives de $k^2 \mathrm{sn}^2 x$, puisque cette fonction, comme celles qui ont été précédemment introduites, a pour seul pôle $x = i\mathrm{K}'$. Nous déduirons pour cela un développement, suivant les puissances croissantes de ε, de l'équation

$$\begin{aligned}\Psi(i\mathrm{K}' + \varepsilon) &= -f(i\mathrm{K}' - \varepsilon)\, \mathrm{F}(i\mathrm{K}' + \varepsilon)\\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon} - \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1\varepsilon - \mathrm{H}_2\varepsilon^2 + \ldots\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots\right),\end{aligned}$$

développement que je représenterai par la formule

$$\Psi(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon^n} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_i}{\varepsilon^{n-i}} + \ldots,$$

en posant

$$\alpha_0 = -\mathrm{H}_0, \quad \alpha_1 = \mathrm{H}_1, \quad \ldots,$$

et nous observerons immédiatement que cette série ne contient point le terme $\frac{\alpha_{n-1}}{\varepsilon}$. On a effectivement, pour $n = 2\nu$,

$$\alpha_{n-1} = \mathrm{H}_{2\nu-1} + h_1 \mathrm{H}_{2\nu-3} + h_2 \mathrm{H}_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1}\mathrm{H}_1 + h_\nu,$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$\alpha_{n-1} = -(\mathrm{H}_{2\nu-2} + h_1 \mathrm{H}_{2\nu-4} + h_2 \mathrm{H}_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1}\mathrm{H}_0).$$

Or on voit que, d'après les équations obtenues pour la détermination de ω et λ, au § XLV, le coefficient α_{n-1} est nul dans les deux cas. La partie principale du développement de $\Psi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$, à laquelle nous joindrons le terme indépendant de ε, est donc

$$\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}+\frac{\alpha_0}{\varepsilon^n}+\frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}}+\ldots+\frac{\alpha_{n-2}}{\varepsilon^2}+\alpha_n.$$

On en conclut, quand $n=2\nu$,

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&-\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-1}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu+1)}+\alpha_0\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu)}\\&-\alpha_1\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu-1)}+\ldots+\alpha_{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)+\alpha,\end{aligned}$$

la constante ayant pour valeur

$$\alpha=\alpha_{2\nu}-\alpha_{2\nu-2}s_0-\alpha_{2\nu-4}\frac{s_1}{3}-\ldots-\alpha_0\frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1},$$

puis, dans le cas de $n=2\nu-1$,

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&+\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu)}-\alpha_0\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu-1)}\\&+\alpha_1\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)}{\Gamma(2\nu-3)}-\ldots+\alpha_{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2x)+\alpha,\end{aligned}$$

en posant

$$\alpha=\alpha_{2\nu-1}-\alpha_{2\nu-3}s_0-\alpha_{2\nu-5}\frac{s_1}{3}-\ldots-\alpha_1\frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3}-\frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1}.$$

Soit maintenant $\mathrm{sn}^2x=t$; les expressions auxquelles nous venons de parvenir prendront cette nouvelle forme, à savoir

$$\Psi(x)=\mathrm{G}(t)+\sqrt{\mathrm{R}(t)}\,\mathrm{G}_1(t),$$

où $\mathrm{G}(t)$ et $\mathrm{G}_1(t)$ sont des polynômes entiers en t des degrés ν et $\nu-1$ dans le premier cas, ν et $\nu-2$ dans le second. Observons aussi que, le radical $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$ changeant de signe avec x, d'après la condition

$$\sqrt{\mathrm{R}(t)}=\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x,$$

on aura

$$\Psi(-x)=\mathrm{G}(t)-\sqrt{\mathrm{R}(t)}\,\mathrm{G}_1(t);$$

nous concluons donc de l'égalité donnée plus haut

$$\Psi(x)\Psi(-x)=(-1)^{n+1}k^2(\mathrm{sn}^2x-\mathrm{sn}^2\omega)\Phi(x),$$

la suivante :

$$G^2(t) - R(t)G_1^2(t) = (-1)^{n+1}k^2(t - \mathrm{sn}^2\omega)\Pi(t).$$

Cette forme de relation est bien connue par le théorème d'Abel pour l'addition des intégrales elliptiques, et l'on sait que les polynômes $G(t)$, $G_1(t)$, étant des degrés donnés tout à l'heure, se trouvent, à un facteur constant près, déterminés par la condition que l'expression

$$G^2(t) - R(t)G_1^2(t)$$

soit divisible par $\Pi(t)$. Il suffit, par conséquent, de nous reporter à l'équation obtenue au § XLIX, à savoir :

$$N\varphi^2(t) - R(t)\psi^2(t) = \Pi(t)(gt - g'),$$

pour en conclure le résultat que nous avons annoncé

$$\mathrm{sn}^2\omega = \frac{g'}{g}.$$

Mais nous voyons, de plus, qu'on peut poser

$$\rho\left[G(t) + \sqrt{R(t)}\,G_1(t)\right] = \sqrt{N}\,\varphi(t) + \sqrt{R(t)}\,\psi(t),$$

ρ désignant une constante. Voici maintenant les conséquences à tirer de cette relation.

Je supposerai que l'on ait $n = 2\nu$; les polynômes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, dont les coefficients doivent être regardés comme connus et, si l'on veut, exprimés sous forme entière en h, seront alors des degrés ν et $\nu - 1$. Cela étant, revenons à la variable primitive en faisant $t = \mathrm{sn}^2 x$, on pourra mettre $\sqrt{R(t)}\,\psi(t)$ et $\varphi(t)$ sous la forme suivante, à savoir :

$$\sqrt{R(t)}\,\psi(t) = -a\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu+1)} - a'\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} - \ldots$$

$$\varphi(t) = +b\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + b'\frac{D_x^{2\nu-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots.$$

Nous aurons donc cette expression de la fonction $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}\rho\Psi(x) = - \quad & a\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu+1)} - a'\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} - \ldots \\ & + \sqrt{N}\left[b\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + b'\frac{D_x^{2\nu-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots\right],\end{aligned}$$

où les constantes a, a', $\ldots$, b, b', $\ldots$ sont déterminées linéairement par les coefficients de $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

Or on en déduit, en faisant $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$ et se rappelant qu'on a supposé $n = 2\nu$, l'égalité suivante :

$$\rho\left(\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon^n} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}} + \cdots\right) = \frac{a}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{a'}{\varepsilon^{n-1}} + \cdots + \sqrt{\mathrm{N}}\left(\frac{b}{\varepsilon^n} + \frac{b'}{\varepsilon^{n-2}} + \cdots\right),$$

d'où nous tirons

$$\rho = a,$$
$$\rho\alpha_0 = b\sqrt{\mathrm{N}},$$
$$\rho\alpha_1 = a',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Éliminons l'indéterminée ρ et remplaçons les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ par leurs valeurs § L (p. 135); on aura ces relations

$$\lambda = -\frac{b\sqrt{\mathrm{N}}}{a},$$
$$h_1 + \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \Omega) = \frac{a'}{a},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La première donne l'expression de λ, et nous reconnaissons, par cette voie, qu'elle ne contient d'autre irrationnalité que $\sqrt{\mathrm{N}}$. On obtiendrait la même conclusion dans le cas de $n = 2\nu - 1$, et c'est le résultat que j'avais principalement en vue d'établir, après avoir démontré que $\mathrm{sn}^2\omega$ est une fonction rationnelle de h. L'étude des solutions de Lamé qui correspondent aux racines de l'équation $\mathrm{N} = 0$ nous permettra, comme on va le voir, d'aller plus loin et d'approfondir davantage la nature de ces expressions de λ et $\mathrm{sn}^2\omega$.

LI.

On a vu au § XLIX (p. 133) que l'intégrale générale de l'équation différentielle n'est plus représentée, lorsqu'on a $\mathrm{N} = 0$, par la formule

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}'\,\mathrm{F}(-x),$$

le rapport $\frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(-x)}$ se réduisant alors à une constante, et, comme conséquence, nous avons établi que les multiplicateurs de la fonction de seconde espèce deviennent, au signe près, égaux à l'unité. Suivant les diverses combinaisons des signes de μ et μ', nous pouvons donc avoir des solutions particulières de quatre espèces, caractérisées par les relations suivantes :

(I) $F(x+2K) = -F(x), \quad F(x+2iK') = +F(x),$

(II) $F(x+2K) = -F(x), \quad F(x+2iK') = -F(x),$

(III) $F(x+2K) = +F(x), \quad F(x+2iK') = -F(x),$

(IV) $F(x+2K) = +F(x), \quad F(x+2iK') = +F(x).$

Toutes existent en effet, et les trois premières, où $F(x)$ a successivement la périodicité de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, s'obtiennent en faisant, dans l'expression générale de cette formule, $\lambda = 0$, conjointement avec $\omega = 0$, $\omega = K$, $\omega = K + iK'$. Nous remarquerons, pour l'établir, que, les valeurs de l'élément simple

$$f(x) = e^{\lambda(x-iK')}\chi(x)$$

étant alors $f(x) = k\operatorname{sn}x$, $ik\operatorname{cn}x$, $i\operatorname{dn}x$, dans ces trois cas, les développements en série de $f(iK'+\varepsilon)$ ne contiennent que des puissances impaires de ε, de sorte que les coefficients désignés par H_i s'évanouissent tous pour des valeurs paires de l'indice. Des deux conditions obtenues au § XLV (p. 123), pour la détermination de ω et λ, à savoir :

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$
$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu-2) h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu-4) h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1} H_2 = 0,$$

dans le cas de $n = 2\nu$; puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$
$$(2\nu-1) H_{2\nu-1} + (2\nu-3) h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0;$$

on voit ainsi qu'une seule subsiste et détermine la constante h, l'autre étant satisfaite d'elle-même.

Mais soit, pour plus de précision,

$$k\operatorname{sn}(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^3 + \ldots + p_i\varepsilon^{2i-1} + \ldots,$$

$$ik\operatorname{cn}(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^3 + \ldots + q_i\varepsilon^{2i-1} + \ldots,$$

$$i\operatorname{dn}(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \ldots + r_i\varepsilon^{2i-1} + \ldots;$$

je poserai, dans le cas de $n = 2\nu$,

$$P = p_\nu + h_1 p_{\nu-1} + h_2 p_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} p_1 + h_\nu,$$
$$Q = q_\nu + h_1 q_{\nu-1} + h_2 q_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} q_1 + h_\nu,$$
$$R = r_\nu + h_1 r_{\nu-1} + h_2 r_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} r_1 + h_\nu;$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$
\begin{aligned}
P &= (2\nu - 1)p_\nu + (2\nu - 3)h_1 p_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} p_1 - h_\nu, \\
Q &= (2\nu - 1)q_\nu + (2\nu - 3)h_1 q_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} q_1 - h_\nu. \\
R &= (2\nu - 1)r_\nu + (2\nu - 3)h_1 r_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} r_1 - h_\nu;
\end{aligned}
$$

cela étant, les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

détermineront les valeurs particulières de h auxquelles correspondent les trois espèces de solutions que nous avons considérées, et l'on voit que dans les deux cas elles sont toutes du degré ν.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à obtenir les solutions de la quatrième espèce dont la périodicité est celle de $\operatorname{sn}^2 x$, mais elles se déduisent moins immédiatement que les précédentes de l'expression générale de $F(x)$; il est nécessaire, en effet, de supposer alors la constante λ et $\operatorname{sn}\omega$ infinis; je donnerai en premier lieu une méthode plus directe et plus facile pour y parvenir.

Soit d'abord $n = 2\nu$; je remarque que toute solution de l'équation différentielle par une fonction doublement périodique de première espèce résulte du développement

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu,$$

et sera donnée par l'expression

$$
\begin{aligned}
F(x) = {} & \frac{D_x^{2\nu-2}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + h_1 \frac{D_x^{2\nu-4}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}(k^2 \operatorname{sn}^2 x) \\
& + h_\nu - h_{\nu-1} s_0 - h_{\nu-2} \frac{s_1}{3} - \ldots - h_1 \frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3} - \frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1}.
\end{aligned}
$$

Cela étant, disposons de h de manière à avoir

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu + h_{\nu+1}\varepsilon^2,$$

ce qui donne la condition

$$\nu s_\nu + (\nu - 1)h_1 s_{\nu-1} + (\nu - 2)h_2 s_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} s_1 = h_{\nu+1},$$

je dis que la fonction doublement périodique

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x)$$

est nécessairement nulle. Si, après avoir posé $x = iK' + \varepsilon$, on la développe en effet suivant les puissances croissantes de ε, non seulement la partie principale, mais le terme indépendant disparaîtront, comme on l'a vu au § XLIV, p. 121. De ce que la partie principale n'existe pas, on conclut que la fonction est constante; enfin cette constante elle-même est nulle, puisqu'elle s'exprime linéairement et sous forme homogène par le terme indépendant de ε, et les coefficients des divers termes en $\frac{1}{\varepsilon}$.

Soit ensuite $n = 2\nu - 1$; le développement qu'on tire de l'équation différentielle, à savoir

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + \ldots,$$

contenant un terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, on doit tout d'abord le faire disparaître en posant $h_{\nu-1} = 0$, pour en déduire une fonction doublement périodique de première espèce, qui sera de cette manière

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-3}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-3)} - \ldots - h_{\nu-2} D_x(k^2 \operatorname{sn}^2 x).$$

Cela étant, et en nous bornant à la partie principale, on aura

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\varepsilon^3};$$

il en résulte que, si on laisse indéterminée la constante h, le développement de l'expression

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

après avoir posé $x = iK' + \varepsilon$, commencera par un terme en $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Mais faisons $h_{\nu-1} = 0$; comme on peut écrire alors

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\varepsilon^3} + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon},$$

on voit que ce développement commencera par un terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, qui lui-même doit nécessairement s'évanouir, et il est ainsi prouvé que, sous la condition posée, le résultat de la substitution de la fonction $F(x)$, dans le premier membre de l'équation différentielle, ne peut être qu'une constante. J'ajoute que cette constante est nulle, le résultat de la substitution étant, comme $F(x)$, une fonction qui change de signe avec la variable. Soit donc, dans le cas de $n = 2\nu$,

$$S = \nu s_\nu + (\nu - 1)h_1 s_{\nu-1} + (\nu - 2)h_2 s_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} s_1 - h_{\nu+1};$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$S = h_{\nu-1},$$

on voit que les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0$$

déterminent les valeurs de h auxquelles correspondent les quatre espèces de solutions doublement périodiques découvertes par Lamé, ces solutions ne se trouvant plus distinguées par leur expression algébrique, comme l'a fait l'illustre auteur, mais d'après la nature de leur périodicité. On voit aussi que la condition $N = 0$, d'où elles ont été tirées, se présente sous la forme

$$PQRS = 0,$$

et l'on vérifie immédiatement que le produit des quatre facteurs, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, est bien du degré $2n + 1$ et h, comme nous l'avons établi pour N au § XLIX, page 133.

Voici maintenant le procédé que j'ai annoncé pour déduire les solutions de la quatrième espèce de la solution générale.

LII.

Je reviens à l'élément simple

$$f(x) = \frac{H'(0)H(x+\omega)}{\Theta(x)\Theta(\omega)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right](x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}},$$

où λ et $\operatorname{sn}\omega$ sont des fonctions déterminées de h; je les suppose infinies l'une et l'autre pour une certaine valeur de cette constante, et je me propose de reconnaître ce que devient, lorsqu'on attribue à h cette valeur, l'expression de $f(x)$. Concevons, à cet effet, que λ soit exprimé au moyen de ω; je ferai

$$\omega = iK' + \delta,$$

ce qui donne, après une réduction facile,

$$f(x) = \frac{H'(0)\Theta(x+\delta)}{\Theta(x)H(\delta)} e^{\left[\lambda - \frac{H'(\delta)}{H(\delta)}\right](x - iK') + \frac{i\pi\delta}{K}}$$

Or nous avons, en développant suivant les puissances croissantes de δ

$$\frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)} = \frac{1}{\delta} - \left(s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\delta - \frac{s_1\delta^3}{3} - \frac{s_2\delta^5}{5} - \ldots;$$

cela étant, pour que l'exponentielle

$$e^{\left[\lambda - \frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)}\right](x - i\mathrm{K}')}$$

soit finie lorsqu'on fera $\delta = 0$, on voit que λ doit s'exprimer de telle manière en ω qu'on ait, en supposant $\omega = i\mathrm{K}' + \delta$,

$$\lambda = \frac{1}{\delta} + \lambda_0 + \lambda_1\delta + \ldots.$$

Cette forme de développement nous donne, en effet,

$$\lambda - \frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)} = \lambda_0 + \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\delta + \ldots;$$

on a d'ailleurs immédiatement

$$\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(\delta)} = \frac{1}{\delta} + \left(s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\frac{\delta}{2} + \ldots,$$

$$\frac{\Theta(x+\delta)}{\Theta(x)} = 1 + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\delta + \ldots,$$

et nous en concluons l'expression

$$f(x) = e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}\left(\frac{1}{\delta} + \mathrm{X} + \mathrm{X}_1\delta + \ldots\right),$$

où le terme indépendant de δ, qui sera seul à considérer, est

$$\mathrm{X} = \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)(x - i\mathrm{K}') + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Elle fait voir que les formules, pour $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$,

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{\mathrm{D}^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}\mathrm{D}_x f(x),$$

puis

$$\mathrm{F}(x) = +\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{\mathrm{D}^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}f(x),$$

contiennent chacune un terme en $\frac{1}{\delta}$, qui est, pour la première,

$$-e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}\left[\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_0\right],$$

et dans la seconde

$$e^{\lambda_0(x-iK')}\left[\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)}+h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)}+\ldots+h_{\nu-1}\right].$$

Il est donc nécessaire, afin d'obtenir des quantités finies en faisant $\delta = 0$, que λ_0 satisfasse à ces équations

$$\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)}+h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)}+\ldots+h_{\nu-1}\lambda_0=0,$$

$$\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)}+h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)}+\ldots+h_{\nu-1}=0.$$

Cela étant, les expressions de $F(x)$ se transforment de la manière suivante.

Soit, en général,

$$f(x)=e^{\lambda x}X,$$

en désignant par λ et X une constante et une fonction quelconques. On voit aisément que la quantité

$$AD_x^n f(x)+A_1D_x^{n-1}f(x)+\ldots+A_nf(x),$$

si l'on admet la relation

$$A\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\ldots+A_n=0,$$

s'exprime, au moyen de la nouvelle fonction

$$f_1(x)=e^{\lambda x}D_xX,$$

par la formule

$$\begin{aligned}&AD_x^{n-1}f_1(x)+(A\lambda+A_1)D_x^{n-2}f_1(x)+\ldots\\&\qquad+(A\lambda^{n-1}+A_1\lambda^{n-2}+\ldots+A_{n-1})f_1(x).\end{aligned}$$

Dans le cas auquel nous avons été conduit, on tire immédiatement de la valeur de X l'expression

$$f_1(x)=e^{\lambda_0(x-iK')}(\lambda_1+s_0-k^2\,\mathrm{sn}^2x),$$

et nous obtenons par conséquent pour $F(x)$ le produit, par l'exponentielle $e^{\lambda_0 x}$, d'une fonction doublement périodique de première espèce, composée linéairement avec les dérivées de $\mathrm{sn}^2 x$. L'analyse précédente, en établissant l'existence de ce genre de solutions de l'équation différentielle, les rattache aux valeurs de h qui rendent à la fois infinies les constantes λ et $\mathrm{sn}\,\omega$; on voit aussi que, dans le cas particulier où λ_0 est nul, elles donnent bien les fonctions que je me suis proposé de déduire de la solution générale. Mais revenons à la première forme qui a été obtenue au moyen de la fonction

$$f(x) = e^{\lambda_0(x-iK')}\left(\frac{1}{\delta} + X + X_1\delta + \ldots\right).$$

Le terme $\dfrac{e^{\lambda_0(x-iK')}}{\delta}$ disparaissant, comme nous l'avons vu dans l'expression de $F(x)$, il est permis de prendre plus simplement à la limite, pour $\delta = 0$,

$$f(x) = e^{\lambda_0(x-iK')}X.$$

Cette fonction joue donc le rôle d'élément simple; il est facile, lorsqu'on fait $x = iK' + \varepsilon$, d'obtenir son développement et d'avoir ainsi les quantités qui remplacent, dans le cas présent, les coefficients désignés en général par H_0, H_1, etc. Nous avons en effet, pour $x = iK' + \varepsilon$,

$$X = \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{J}{K}\right)\varepsilon + \frac{H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} + \lambda_1\varepsilon - \frac{s_1\varepsilon^3}{3} - \frac{s_2\varepsilon^5}{5} - \ldots.$$

Multiplions par $e^{\lambda_0\varepsilon}$ les deux membres, et soit

$$e^{\lambda_0\varepsilon}X = \frac{1}{\varepsilon} + S_0 + S_1\varepsilon + \ldots + S_i\varepsilon^i,$$

nous trouverons

$$S_0 = \lambda_0,$$

$$S_1 = \frac{\lambda_0^2}{1.2} + \lambda_1,$$

$$S_2 = \frac{\lambda_0^3}{1.2.3} + \lambda_1\lambda_0,$$

$$S_3 = \frac{\lambda_0^4}{1.2.3.4} + \lambda_1\frac{\lambda_0^2}{1.2} - \frac{s_1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

S_i étant, en général, un polynôme du degré $i+1$ en λ_0, où n'entrent que des puissances impaires ou des puissances paires, suivant que l'indice est pair ou impair. Les conditions données au § XLV (p. 123) conduisent donc, dans les deux cas de $n = 2\nu$, $n = 2\nu - 1$, en y joignant l'équation en λ_0 précédemment trouvée, à ces trois relations

$$\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_0 = 0,$$

$$S_{2\nu-1} + h_1S_{2\nu-3} + h_2S_{2\nu-5} + \ldots + 2h_{\nu-1}S_1 + h_\nu = 0,$$

$$2\nu S_{2\nu} + (2\nu-2)h_1S_{2\nu-2} + (2\nu-4)h_2S_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1}S_2 = 0,$$

lorsque l'on suppose $n = 2\nu$, puis

$$\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1 \frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1} = 0,$$

$$S_{2\nu-2} + h_1 S_{2\nu-4} + h_2 S_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} S_0 = 0,$$

$$(2\nu-1)S_{2\nu-1} + (2\nu-3)h_1 S_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} S_1 - h_\nu = 0$$

pour $n = 2\nu - 1$. Elles donnent le moyen d'obtenir directement, et sans supposer la connaissance de la solution générale, les trois quantités λ_0, λ_1 et h. Elles montrent aussi qu'on a en particulier la valeur $\lambda_0 = 0$, à laquelle correspondent les solutions de Lamé. Effectivement, lorsque λ_0 est supposé nul, on obtient

$$S_{2i} = 0, \quad S_1 = \lambda_1, \quad S_{2i+1} = -\frac{s_i}{2i+1};$$

cela étant, dans le cas de $n = 2\nu$, la première et la troisième équation sont satisfaites d'elles-mêmes ; la deuxième, devenant

$$-\frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1} - h_1 \frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3} - h_2 \frac{s_{\nu-3}}{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_1 + h_\nu = 0,$$

ne détermine que λ_1. Il est donc nécessaire de recourir à l'une des relations en nombre infini qui ont été données au § XLVI (p. 125), sous ces formes :

$$\mathfrak{H}_i = 0, \quad \mathfrak{H}_{2i} = h_{i+\nu}, \quad \mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} = C h'_i.$$

» La plus simple est

$$\mathfrak{H}_2 = h_{\nu+1},$$

ou bien

$$-\nu(2\nu+1)H_{2\nu+1} + (\nu-1)(2\nu-1)h_1 H_{2\nu-1} \\ + (\nu-2)(2\nu-3)h_2 H_{2\nu-3} + \ldots + 3h_{\nu-1} H_3 + h_{\nu+1} = 0,$$

et nous en tirons immédiatement

$$-\nu s_\nu - (\nu-1)h_1 s_{\nu-1} - (\nu-2)h_2 s_{\nu-2} - \ldots - h_{\nu-1} s_1 + h_{\nu+1} = 0,$$

ce qui est l'équation en h précédemment trouvée.

» En dernier lieu et pour le cas de $n = 2\nu - 1$, nos trois relations se trouvent vérifiées si l'on fait $h_{\nu-1} = 0$; on retrouve donc encore de cette manière le résultat auquel nous étions précédemment parvenu par une méthode toute différente.

FIN DU PREMIER FASCICULE.

[redacted] $T(x,a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$

[redacted]